ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Το περιεχόμενο αυτών των σημειώσεων είναι λίγο πολύ το περιεχόμενο μιας σειράς (έξι) ομιλιών που δόθηκαν σε ομάδα μεταπτυχιακών σπουδαστών με προτροπή, φροντίδα και φιλοξενία του καθηγητή της Σχολής Ναυπηγών του ΕΜΠ, Γ. Αθανασούλη.
Ο ομιλητής, που είναι ο υπογράφων, σε κάθε ομιλία διένειμε χειρόγραφο κείμενο με λεπτομερή ανάπτυξη του περιεχομένου. Είναι με το μόχθο της μεταπτυχιακής σπουδάστριας Ευαγγελίας Δραγάζη που οι περίπου 200 σελίδες χειρογράφων πήραν την έντυπη και φροντισμένη μορφή του παρόντος κειμένου.
Ευχαριστώ θερμά από τη θέση αυτή την Ευαγγελία Δραγάζη όπως βέβαια και τον Γ. Αθανασούλη για την έμπρακτη συνεισφορά τους.
Σχετικά με το κείμενο τώρα επισημαίνονται τα εξής: Η απόδοση όρων στα Ελληνικά δεν είναι συστηματική· κάποιοι όροι αναφέρονται μόνο στα Αγγλικά (π.χ. tightnes) ενώ για άλλους έγινε κάποια απόπειρα απόδοσης. Για αυτήν την τελευταία περίπτωση σημειώνεται ότι με τον όρο **πλήρως κανονικός** τοπ. χώρος νοείται αυτός που στην Αγγλική βιβλιογραφία αναφέρεται με τον όρο completely regular (και δεν πρόκειται για τους τοπ. χώρους που είναι γνωστοί ως completely normal που άλλωστε δεν υπάρχουν στο κείμενο αυτό).
Ο γραφών θα χαρεί ειλικρινώς για τυχόν παρατηρήσεις ή διορθώσεις που ενδεχομένως προταθούν.

Αθήνα 2010

Ι. Σπηλιώτης

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

$\sigma(\mathscr{E})$	η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την κλάση υποσυνόλων $\mathscr{E}$
$\sigma(\Gamma)$	η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το σύνολο συναρτήσεων $\Gamma \subset Y^X$ όπου $(Y, \mathscr{H})$ μετρήσιμος χώρος.
$\mathscr{F}_E$	το ίχνος της σ-άλγεβρας $\mathscr{F}$ στο E.
$\mathcal{T}$ ή $\mathcal{T}_X$ ή $\mathcal{T}(X)$	τα ανοικτά ενός τοπολ. χώρου X.
$\mathscr{G}$ ή $\mathscr{G}_X$ ή $\mathscr{G}(X)$	τα κλειστά ενός τοπολ. χώρου X.
$\mathcal{K}$ ή $\mathcal{K}_X$ ή $\mathcal{K}(X)$	τα συμπαγή ενός τοπολ. χώρου X.
$\mathscr{B}$ ή $\mathscr{B}_X$ ή $\mathscr{B}(X)$	η σ-άλγεβρα Borel ενός τοπολ. χώρου X $(\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T}))$.
$\mathscr{B}(X, \tau)$	η σ-άλγεβρα Borel ως προς την τοπολογία τ του χώρου X.
$\mathscr{B}^m$	η σ-άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}^m$.
$C(X, \Gamma)$ με $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$	η κυλινδρική άλγεβρα η παραγόμενη από το σύνολο συναρτήσεων Γ.
$\hat{C}(X, \Gamma)$ με $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$	η κυλινδρική σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το σύνολο συναρτήσεων Γ, ήτοι $\sigma(C(X, \Gamma))$.
$C(X)$ ή $C(X, \mathbb{R})$	το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων σε έναν τοπ. χώρο X.
$C_b(X)$	το σύνολο των συνεχών φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων σε έναν τοπ. χώρο X.
$K(X)$	το σύνολο των συνεχών με συμπαγή φορέα πραγματικών συναρτήσεων σε έναν τοπ. χώρο X.
$\sigma(X, X')$	η ασθενής τοπολογία ενός τοπ. κυρτού τοπ. διαν. χώρου X.
$\mathscr{C}(X, X')$	η ισχυρή τοπολογία ενός τοπ. κυρτού τοπ. διαν. χώρου X.
$\tau(X, X')$	η τοπολογία Mackey ενός τοπ. κυρτού τοπ. διαν. χώρου X.
$\tau_S(X, X')$	η τοπολογία Sazonov ενός τοπ. κυρτού τοπ. διαν. χώρου X.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μέτρα και σ-άλγεβρες

1.1 Μέτρα σε αφηρημένους χώρους

Έστω σύνολο $\Omega \neq \emptyset$

Ορισμός 1.1.1. *Ένα σύνολο $\mathscr{F}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται* **σ-άλγεβρα** *όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:*

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. *Αν* $A \in \mathscr{F}$ *τότε* $A^c \in \mathscr{F}$
3. *Αν* $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathscr{F}$ *τότε* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

Άμεση συνέπεια των απαιτήσεων αυτών είναι:

- $\emptyset \in \mathscr{F}$
- Αν $A, B \in \mathscr{F}$ τότε $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \triangle B \in \mathscr{F}$
- Αν $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathscr{F}$ τότε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

Παράδειγμα 1.1.2. (Τετριμμένων σ-αλγεβρών)

1. $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ όπου $A \subset \Omega$ με $A \neq \emptyset, \Omega$
3. Αν $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ στο $\{1, ...k\}$ τότε η

   $\mathscr{F} = \left\{ \bigcup\limits_{i \in I} A_i : I \subset \{1, ..., k\} \right\}$ είναι σ-άλγεβρα και μάλιστα $card \mathscr{F} = 2^k$
4. $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω.

Πρόταση 1.1.3. *Αν $\{\mathscr{F}_i, i \in I\}$ είναι οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του Ω τότε η $\mathscr{F} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$ είναι σ-άλγεβρα. (Να σημειωθεί ότι η $\mathscr{F}$ δεν είναι κενή αφού $\emptyset, \Omega \in \mathscr{F}_i$ για όλα τα $i \in I$.)*

Παρατήρηση 1.1.4. Δεν ισχύει το ίδιο για την $\bigcup_{i \in I} \mathscr{F}_i$.

Με βάση την παραπάνω Πρόταση:

Ορισμός 1.1.5. *Έστω $\mathscr{C}$ μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω.*
*Ονομάζεται **σ-άλγεβρα παραγόμενη από την** $\mathscr{C}$ η σ-άλγεβρα που είναι τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την κλάση $\mathscr{C}$ (υπάρχει τουλάχιστον μια τέτοια , η $\mathscr{P}(\Omega)$).*
Η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την κλάση $\mathscr{C}$ γράφεται συμβολικά $\sigma(\mathscr{C})$ και προφανώς ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- $\sigma(\mathscr{C}) \supset \mathscr{C}$
- *αν η σ-άλγεβρα $\mathscr{F} \supset \mathscr{C}$ τότε $\mathscr{F} \supset \sigma(\mathscr{C})$*
  δηλαδή η $\sigma(\mathscr{C})$ είναι η ελάχιστη (με την έννοια του εγκλεισμού) σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathscr{C}$.

Πρόταση 1.1.6.

1. *Αν $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$ τότε $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$*
2. *Αν $\mathscr{C}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$*
3. *Αν $\mathscr{C} \subset \mathscr{E} \subset \sigma(\mathscr{C})$ τότε $\sigma(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{C})$*

Ιδιαίτερης σημασίας παραγόμενη σ-άλγεβρα είναι η **σ-άλγεβρα** Borel του $\mathbb{R}^m$ η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.1.7. *Έστω $\mathscr{E}$ το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$. Ονομάζεται **σ-άλγεβρα** Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ η σ-άλγεβρα $\mathscr{B}^m \equiv \sigma(\mathscr{E})$.*

Έυκολα επαληθεύεται ότι (δες [2])

Πρόταση 1.1.8. *Αν $\mathscr{P}^m = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] : a_i < b_i \text{ στο } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ και $\mathscr{H}$ το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ τότε*

$$\mathscr{B}^m = \sigma(\mathscr{H}) = \sigma(\mathscr{P}^m).$$

Ακόμα $\mathscr{B}^m = \sigma(\mathscr{L})$
όπου $\mathscr{L} = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^m, r > 0\}$, με $B(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < r\}$

Παρατήρηση 1.1.9. Όλα τα ανοικτά, όπως και όλα τα κλειστά υποσυνολα του $\mathbb{R}^m$ ανήκουν στην $\mathscr{B}^m$. Συνεπώς και όλα τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Ιδιαίτερα :

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ ισχύει $\{x\} \in \mathscr{B}^m$ (ως κλειστό)
- Στο $\mathbb{R}$ το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} \in \mathscr{B}^1$ αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$.

Συζητηση: Η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από μια κλάση $\mathscr{C}$ ορίστηκε "υπαρξιακά" και **δεν** "κατασκευάστηκε". Είναι εύκολο να αναρωτηθεί κανείς : Είναι δυνατόν να "χτιστεί" ξεκινώντας από τη $\mathscr{C}$;
Η απάντηση είναι ΝΑΙ, ΜΕ ΥΠΕΡΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΕΠΑΓΩΓΗ (transfinite induction) και ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στα [1] ή [9] .
Η δια αυτού του τρόπου κατασκευή της σ-άλγεβρας Borel αποκαλύπτει και τον πληθάριθμό της:

$$card\mathscr{B}^m = card\mathbb{R} \equiv c$$

Ορισμός 1.1.10. *Ένα ζεύγος $(\Omega, \mathscr{F})$ όπου $\Omega \neq \emptyset$ και $\mathscr{F}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος**.*
*Ένα **μέτρο** μ στον $(\Omega, \mathscr{F})$ είναι εξόρισμού μια απεικόνιση*

$$\mu : \mathscr{F} \mapsto [0, \infty]$$

που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *Αν $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για όλα τα $i \neq j$ στο $\mathbb{N}$ τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

*Το μέτρο μ ονομάζεται **πεπερασμένο** όταν $\mu(\Omega) < +\infty$*
*και **σ-πεπερασμένο** όταν υπάρχουν $E_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ με $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\mu(E_n) < +\infty$.*

Πρόταση 1.1.11. *(Ιδιότητες)*
Έστω ένα μέτρο μ στον $(\Omega, \mathscr{F})$. Τότε :

1. *Αν $A \subset B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$*
2. *Αν $A \subset B$ και $\mu(A) < +\infty$ τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*
3. *Αν $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$*
4. *Αν $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ και $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

5. *Αν $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ και $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $\mu(A_k) < +\infty$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ τότε*

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Ορισμός 1.1.12. *Δύο μέτρα μ_1, μ_2 στον $(\Omega, \mathscr{F})$ λέγονται ίσα όταν και μόνο όταν*

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \text{ για κάθε } A \in \mathscr{F}.$$

Το παρακάτω Θεώρημα μας προμηθεύει ένα οικονομικό κριτήριο ισότητας μέτρων.Η απόδειξή του βασίζεται σε κλάσεις υποσυνόλων του Ω με μια ορισμένη δομή και ειναι γνωστές ως "Σύστημα Dynkin " ή "Κλάση Dynkin ". Πλήρη ανάπτυξη δες στο [7] .Ένας προγενέστερος τρόπος αντιμετώπισης βασίζεται στις "μονότονες κλάσεις". (δες [6])

Θεώρημα 1.1.13. *Έστω μ_1, μ_2 μέτρα στον $(\Omega, \mathscr{F})$ με $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$ όπου για την κλάση $\mathscr{C}$ ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:*

- *Αν $A, B \in \mathscr{C}$ τότε $A \cap B \in \mathscr{C}$*
- *Υπάρχουν $E_n \in \mathscr{C}, n \in \mathbb{N}$ με $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$*

Αν $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ $\forall$ $A \in \mathscr{C}$ και αν $\mu_1(E_k) = \mu_2(E_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ τότε τα μέτρα μ_1, μ_2 είναι ίσα.

Παράδειγμα 1.1.14. Έστω μ_1, μ_2 μέτρα στον $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ εις τρόπον ώστε

$$\mu_1((a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m]) = \mu_2((a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m]) < +\infty$$

για οποιοδήποτε " ορθογώνιο" $(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$.
Τότε τα μέτρα μ_1, μ_2 είναι ίσα, δηλαδή $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ για κάθε $B \in \mathscr{B}^m$.
Πράγματι $\mathscr{B}^m = \sigma(\mathscr{P}^m)$, όπου η κλάση $\mathscr{P}^m = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] : a_i < b_i$ στο $\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ ικανοποιεί την απαίτηση: $A, B \in \mathscr{P}^m \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{P}^m$
(Επαληθεύστε για $m = 1$).Επιπλέον θέτοντας $E_n = (-n, n] \times ... \times (-n, n]$ έχουμε $E_n \subset E_{n+1}$ και $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < +\infty$.
Ιδιαίτερα στον $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B}^1)$ παρατηρήστε ότι:
Αν $\mu_1((-\infty, a]) = \mu_2((-\infty, a]) < +\infty$ $\forall a \in \mathbb{Q}$ τότε τα μ_1, μ_2 είναι ίσα ($\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών).

Η μικρή συζήτηση που ακολουθεί εισάγει το "γιατί" της επόμενης έννοιας της "πληρότητας".
Έστω μέτρο μ στον $(\Omega, \mathscr{F})$ και $N \in \mathscr{F}$ με $\mu(N) = 0$. Αν τώρα για το υποσύνολο $\Lambda \subset \Omega$ γνωρίζουμε ότι $\Lambda \subset N$ εν τούτοις **δεν** μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι $\mu(\Lambda) = 0$ αφού δεν γνωρίζουμε αν $\Lambda \in \mathscr{F}$.

Ορισμός 1.1.15. *Έστω ένας* ***χώρος μέτρου*** *$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.*
Αυτός λέγεται **πλήρης** *$\Leftrightarrow$ για κάθε υποσύνολο $\Lambda \subset \Omega$ για το οποίο υπάρχει $N \in \mathscr{F}$ με $\Lambda \subset N$ και $\mu(N) = 0$, ισχύει $\Lambda \in \mathscr{F}$ (και άρα $\mu(\Lambda) = 0$).*

Θεώρημα 1.1.16. *(Πλήρωση ενός χώρου μέτρου)*
Έστω χώρος μέτρου $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.Θέτουμε

$\mathcal{N}_\mu = \{\Lambda \subset \Omega$: *υπάρχει* $N \in \mathscr{F}$ *με* $\mu(N) = 0$ *και* $\Lambda \subset N\}$
$\bar{\mathscr{F}}_\mu = \{A \cup N : A \in \mathscr{F}$ *και* $N \in \mathcal{N}\}$

και ορίζουμε $\bar{\mu} : \bar{\mathscr{F}}_\mu \mapsto [0, \infty]$ *ως εξής:* $\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$.
Τότε η $\bar{\mathscr{F}}_\mu$ *είναι σ-άλγεβρα που περίεχει την* $\mathscr{F}$ *, η* $\bar{\mu}$ *είναι καλά ορισμένη και είναι μέτρο στον* $(\Omega, \bar{\mathscr{F}})$ *που επεκτείνει το* μ *και ο χώρος μέτρου* $(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ *είναι πλήρης. Η πλήρης επέκταση* $(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ *είναι minimal (δηλαδή αν* $(\Omega, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ *είναι πλήρης χώρος μέτρου και* $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}$ *και* $\mu_1|\mathscr{F} = \mu$ *τότε* $\mathscr{F}_1 \supset \bar{\mathscr{F}}_\mu$ *και* $\mu_1|\bar{\mathscr{F}}_\mu = \bar{\mu}$*).*

Παρατήρηση 1.1.17. Ευκολα επαληθεύεται οτι $\bar{\mathscr{F}}_\mu = \sigma(\mathscr{F} \cup \mathcal{N}_\mu)$.
Ακόμα ότι $\bar{\mathscr{F}}_\mu = \{A \subset \Omega$ υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$ με $B_1 \subset A \subset B_2$ και $\mu(B_1) = \mu(B_2)\}$

Απόδειξη. Δες [6] □

Το επόμενο ζήτημα είναι η κατασκευή-επέκταση μέτρων σε μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathscr{F})$ με δεδομένο τον ορισμό τους σε "φτωχές" κλάσεις $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$. Προς τούτο είναι απαραίτητη η έννοια του **εξωτερικού μέτρου**.

Ορισμός 1.1.18. *Έστω* $\Omega \neq \emptyset$ *και* $\mathscr{P}(\Omega)$ *το σύνολο όλων των υποσυνόλων του* Ω*. Ονομάζεται* **εξωτερικό μέτρο** *στον* Ω *μια συνάρτηση* $\nu : \mathscr{P}(\Omega) \mapsto [0, \infty]$ *που ικανοποιεί τα παρακάτω:*

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. *Αν* $A \subset B$ *τότε* $\nu(A) \leq \nu(B)$
3. *Αν* $A_n \subset \Omega, n \in \mathbb{N}$ *τότε* $\nu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$

Η έννοια του εξωτερικού μέτρου είναι βοηθητική για την κατασκευή μέτρων και αυτό χάρη στα παρακάτω αποτελέσματα:

Ορισμός 1.1.19. *Έστω* ν *ένα εξωτερικό μέτρο ορισμένο στα υποσύνολα του* Ω*.Ένα υποσύνολο* $A \subset \Omega$ *ονομάζεται* **ν-μετρήσιμο** *όταν και μόνο όταν*

$$\nu(A \cap E) + \nu(A^c \cap E) = \nu(E)\ \forall E \subset \Omega \qquad (\star)$$

Το σύνολο των ν-μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω *γράφεται* $\mathcal{M}_\nu$*, είναι δηλαδή*

$$\mathcal{M}_\nu = \{A \subset \Omega : \nu(A \cap E) + \nu(A^c \cap E) = \nu(E)\ \ \forall E \subset \Omega\}$$

Παρατήρηση 1.1.20. Η σχέση $\star$ ισοδυναμεί με την

$$\nu(A \cap E) + \nu(A^c \cap E) \leq \nu(E)\ \ \forall\ E \subset \Omega$$

Άμεση συνέπεια είναι ότι: Αν $\nu(B) = 0$ τότε $B \in \mathcal{M}_\nu$ και συνεπώς αν $\Lambda \subset B$ και $\nu(B) = 0$ τότε $\Lambda \in \mathcal{M}_\nu$

Θεώρημα 1.1.21. *(Καραθεοδωρή)*
Η κλάση υποσυνόλων $\mathcal{M}_\nu$ είναι σ-άλγεβρα και η συνάρτηση ν περιορισμένη στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_\nu$ είναι μέτρο,δηλαδή η τριάδα $(\Omega, \mathcal{M}_\nu, \nu)$ είναι χώρος μέτρου και μάλιστα πλήρης.

Απόδειξη. Δες [3] ή [6] ή [7] ή [9] ή ... □

Το δεύτερο θεμελιώδες γνώρισμα της έννοιας του εξωτερικού μέτρου είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.1.22. *(και ορισμός)*
Έστω $\mathscr{C}$ μη–κενή κλάση υποσυνόλων του Ω με $\emptyset \in \mathscr{C}$.
Έστω $\mu_0 : \mathscr{C} \mapsto [0, \infty]$ εις τρόπον ώστε $\mu_0(\emptyset) = 0$.
Ορίζουμε την $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \mapsto [0, \infty]$ ως ακολούθως:

$$\mu^*(A) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) : B_n \in \mathscr{C} \quad \text{με} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\nu \supset A \right\}$$

με την ακόλουθη σύμβαση: $inf\emptyset = +\infty$
Τότε η μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο Ω και ονομάζεται **εξωτερικό μέτρο παραγόμενο** *από το ζεύγος $(\mathscr{C}, \mu_0)$*

Απόδειξη. Δες [11] □

Ήδη διαφαίνεται η κατασκευή ενός μέτρου ορισμένου σε μια " ευρεία" κλάση ξεκινώντας από μια συνολοσυνάρτηση ορισμένη σε μια "φτωχή" κλάση.Προκειμένου το κατασκευαζόμενο μέτρο να είναι επέκταση και μάλιστα μοναδική της αρχικής συνολοσυνάρτησης πρέπει να απαιτηθούν και άλλες συνθήκες. Αυτό εξυπηρετεί η παρακάτω έννοια του **ημιδακτυλίου** (ή της **ημιάλγεβρας**).

Ορισμός 1.1.23. *Μια μη κενή κλάση $\mathscr{C}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται* **ημιδακτύλιος** *$\Leftrightarrow$ ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:*

1. *$\emptyset \in \mathscr{C}$*
2. *Αν $A, B \in \mathscr{C}$ τότε $A \cap B \in \mathscr{C}$*
3. *Αν $A, B \in \mathscr{C}$ με $A \subset B$ τότε υπάρχουν $E_1, E_2, ..., E_k \in \mathscr{C}$ ξένα ανά δύο τέτοια ώστε $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$*

Αν επιπλέον $\Omega \in \mathscr{C}$ τότε η $\mathscr{C}$ λέγεται **ημιάλγεβρα**

Παράδειγμα 1.1.24.

1. $\Omega = \mathbb{R}^m$ και $\mathscr{P}^m = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] : \ a_i < b_i \text{ στο } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$
   Η κλάση $\mathscr{P}^m$ είναι ημιδακτύλιος (βεβαιωθείτε για $m = 1$).

2. Έστω οι μετρήσιμοι χώροι $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ και $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ όπου βέβαια $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ είναι σ–άλγεβρες υποσυνόλων των Ω_1, Ω_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε:

$$\mathscr{C} = \{A \times B : \ A \in \mathscr{F}_1 \text{και} B \in \mathscr{F}_2\}$$

   Η κλάση είναι ημιάλγεβρα.
   Το συμπέρασμα ισχυέι ακόμα και αν $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ είναι ημιάλγεβρες.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το Θεώρημα Επέκτασης Μέτρου ή καλύτερα κατασκευής μέτρου ξεκινώντας από μια συνολοσυνάρτηση $\mu_0 : \mathscr{C} \mapsto [0, \infty]$ όπου $\mathscr{C}$ ημιδακτύλιος και η οποία ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

(α′) $\mu_0(\emptyset) = 0$

(β′) Αν $A_n \in \mathscr{C}, n \in \mathbb{N}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ και $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$

   τότε $\mu_0(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$.

Οι συνθήκες αυτές θα αναφέρονται ως (α′), (β′).

Θεώρημα 1.1.25. *(Επέκτασης)*
Έστω $\mathscr{C}$ ημιδακτύλιος υποσυνόλων του Ω και η $\mu_0 : \mathscr{C} \mapsto [0, \infty]$ ικανοποιεί τις (α′),(β′) και επιπλέον την

(γ′) Υπάρχουν $E_n \in \mathscr{C}, n \in \mathbb{N}$ με $E_n \subset E_{n+1}$ και $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ και $\mu_0(E_n) < +\infty$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Υπάρχει ένα και **μοναδικό** μέτρο μ στον $(\Omega, \sigma(\mathscr{C}))$ εις τρόπον ώστε $\mu|\mathscr{C} = \mu_0$ (Το μ επεκτείνει την μ_0 στην σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$). Το μέτρο μ είναι **σ-πεπερασμένο**.*

2. *Αν μ^* το εξωτερικό μέτρο,το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{C}, \mu_0)$ τότε $\mathcal{M}_{\mu^*} \supset \sigma(\mathscr{C})$ και $\mu^*|\sigma(\mathscr{C}) = \mu$*

3. *Αν $(\Omega, \overline{(\sigma(\mathscr{C})}, \bar{\mu})$ η πλήρωση του χώρου $(\Omega, \sigma(\mathscr{C}), \mu)$ τότε $\overline{\sigma(\mathscr{C})} = \mathcal{M}_{\mu^*}$ και $\mu^* = \bar{\mu}$*

Θεώρημα 1.1.26. *(Για μέτρα πιθανότητας)*
Στις υποθέσεις η (γ′) συμπληρώνεται με την υπόθεση

“...και $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_0(E_n) = 1$”.

Στα συμπεράσματα η φράση “το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο” στο τέλος του συμπεράσματος (1) αντικαθίσταται από τη φράση “το μ είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $\mu(\Omega) = 1$”.
Όλα τα υπόλοιπα παραμένουν ως έχουν.

Απόδειξη. Δες [8] ή [9] ή [11] $\square$

Παρατήρηση 1.1.27.

1. Υπό τις προϋποθέσεις του τελευταίου θεωρήματος

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \subset \Omega : \mu^*(A) + \mu^*(\Omega \setminus A) = 1\}$$

(Σύγκρινε με τον γενικό ορισμό της $\mathcal{M}_\nu$ στη σελίδα 7)

2. Αν η $\mathscr{C}$ είναι ημιάλγεβρα (δηλ. ημιδακτύλιος με $\Omega \in \mathscr{C}$) τότε στο Θεώρημα 1.1.26 η (γ΄) **και** το συμπλήρωμά της αντικαθίστανται από την : $\mu_0(\Omega) = 1$.

Άσκηση 1. Έστω $A \subset \Omega$ με $\mu^*(A) < +\infty$.Δείξτε ότι υπάρχει $B \in \sigma(\mathscr{C})$ εις τρόπον ώστε $A \subset B$ και $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. Ακόμα ότι για $\Gamma \in \sigma(\mathscr{C})$ με $\Gamma \subset B \setminus A$ ισχύει $\mu^*(\Gamma) = 0$.

Άσκηση 2. Έστω $\mathscr{F}_0$ **άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω,δηλαδή μια κλάση υποσυνόλων του Ω που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

1. $\Omega \in \mathscr{F}_0$
2. Αν $A \in \mathscr{F}_0$ τότε $A^c \in \mathscr{F}_0$
3. Αν A,B $\in \mathscr{F}_0$ τότε $A \cup B \in \mathscr{F}_0$.

Έστω τώρα $\mu_0 : \mathscr{F}_0 \mapsto [0, 1]$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

i. $\mu_0(\Omega) = 1$

ii. Αν $A_1, ..., A_k \in \mathscr{F}_0$ ξένα μεταξύ τους τότε $\mu_0(A_1 \cup ... \cup A_k) = \mu_0(A_1) + ... + \mu_0(A_k)$

iii. Αν $A_n \in \mathscr{F}_0, n \in \mathbb{N}$ με $A_n \supset A_{n+1}$ και $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = 0$

Δείξτε ότι το ζεύγος $(\mathscr{F}_0, \mu_0)$ ικανοποιεί τις προϋποθεσεις του Θεωρήματος 1.1.26 όπως τροποποιείται από την παρατήρηση 2 παραπάνω.

Άσκηση 3. Έστω $\mathscr{C}$ ημιδακτύλιος υποσυνόλων του Ω και η $\mu_0 : \mathscr{C} \mapsto [0, \infty]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις:

(Α΄) $\mu_0(\emptyset) = 0$

(Β΄) Αν $k \in \mathbb{N}$ και $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathscr{C}$ ξένα με $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \in \mathscr{C}$ τότε $\mu_0(A_1 \cup ... \cup A_k) = \mu_0(A_1) + ... + \mu_0(A_k)$

$(\tilde{B})$ Αν $A_n \in \mathscr{C}, n \in \mathbb{N}$ ξένα με $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$ τότε $\mu_0(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$

Δείξτε ότι (Α′) $\wedge$ (Β′) $\wedge$ $(\tilde{B}) \Longleftrightarrow$ (α′) $\wedge$ (β′) (και συνεπώς τα δύο προηγούμενα θεωρήματα μπορούν να αναδιατυπωθούν (στις υποθεσεις) με τις (Α′),(Β′),$(\tilde{B})$ στη θέση των (α′),(β′).

(Υπόδειξη: Πρώτα δείξτε επαγωγικά το ακόλουθο Λήμμα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $A_1, ..., A_k \in \mathscr{C}$ ξένα μεταξύ τους και $B \in \mathscr{C}$ με $B \supset \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ ισχύει $B \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{l} E_j$ όπου $E_j \in \mathscr{C}$ ξένα μεταξύ τους.)

Άσκηση 4. Έστω χώρος μέτρου $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ δηλ. $\mathscr{F}$ σ-άλγεβρα, $\mu : \mathscr{F} \mapsto [0, \infty]$ μέτρο.Έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{F}, \mu)$.(δες σελίδα 8).Δείξτε ότι $\mu^*(A) = inf\{\mu(B) : B \in \mathscr{F}$ με $B \supset A\}$, για κάθε $A \subset \Omega$.

Τα επόμενα συμπεράσματα κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση.Δηλαδή ένα μέτρο κατασκευάζεται ως περιορισμός άλλου μέτρου που ορίζεται σε ευρύτερο σύνολο.

Πρόταση 1.1.28. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F})$ μετρήσιμος χώρος,δηλ.η $\mathscr{F}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Έστω ότι $E \subset \Omega$. Τότε η κλάση υποσυνόλων του E που ορίζεται ως $\mathscr{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathscr{F}\}$ είναι σ-άλγεβρα και μάλιστα αν $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$ τότε $\mathscr{F}_E = \sigma(\mathscr{C}_E)$ όπου $\mathscr{C}_E = \{B \cap E : B \in \mathscr{C}\}$. Η σ-άλγεβρα $\mathscr{F}_E$ ονομάζεται **ίχνος** της $\mathscr{F}$ στο E.*

Απόδειξη. Δες [9] σελίδα 132 □

Το σημαντικό όμως αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο (δες [6] σελιδα 164 ή [7])

Θεώρημα 1.1.29. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ **χώρος πιθανότητας** και P^* το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{F}, P)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο σύνολο $E \subset \Omega$ ισχύει*

$$P^*(E) = 1 \qquad (\triangle)$$

και στην σ-άλγεβρα $\mathscr{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathscr{F}\}$ ορίζουμε $P_0 : \mathscr{F}_E \mapsto [0, 1]$ ως εξής:

$$P_0(A \cap E) = P(A).$$

Τότε $(E, \mathscr{F}_E, P_0)$ είναι χώρος πιθανότητας.
(Να σημειωθεί ότι δεν είναι κατάνάγκη $E \in \mathscr{F}$).

Παρατήρηση 1.1.30. Το θεώρημα ισχύει για **πεπερασμένους** χώρους μέτρου $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ όπου δηλαδή $\mu(\Omega) < +\infty$.Αρκεί η υποθεση $(\triangle)$ να αντικατασταθεί από την $\mu^*(E) = \mu(\Omega)$ (και όταν $E \in \mathscr{F}$ αυτή γράφεται $\mu(E) = \mu(\Omega)$.

1.2 Μέτρα στον $\mathbb{R}^m$. Το μέτρο Lebesgue

Στον χώρο $\mathbb{R}^m$ υπενθυμίζουμε ότι η κλάση

$$\mathscr{P}^m = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] : a_i < b_i \text{ στο } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$$

είναι ημιδακτύλιος και μάλιστα $\mathcal{B}^m = \sigma((P^m))$.
Ορίζουμε $\lambda_0 : \mathscr{P}^m \mapsto [0,\infty)$ ως εξής:

$$\lambda_0(\emptyset) = 0$$
$$\lambda_0((a_1,b_1] \times ... \times (a_m,b_m]) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

Αποδεικνύεται τότε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις (α′),(β′),(γ′) του Θεωρήματος 1.2.25 για την λ_0 στον ημιδακτύλιο $\mathscr{C} = \mathscr{P}^m$.Η (α′) και η (γ′) είναι προφανείς.(Αρκεί να πάρουμε $E_n = (-n,n] \times ... \times (-n,n], n \in \mathbb{N}$).Η απόδειξη της (β′) δεν είναι προφανής (δες π.χ [2] ή [7] ή [9]). Αν τώρα λ^* είναι το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{P}^m, \lambda_0)$ ισχύουν τα παρακάτω:

Θεώρημα 1.2.1. *Υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο λ στον $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ εις τρόπον ώστε $\lambda((a_1,b_1] \times ... \times (a_m,b_m]) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$.*
Επίσης $\mathcal{M}_{\lambda^*} \supset \mathscr{B}^m$ και $\lambda^*(A) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathscr{B}^m$.
Ακόμα αν $(\mathbb{R}^m, \bar{\mathscr{B}}^m, \bar{\lambda})$ είναι η πλήρωση του χώρου $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m, \lambda)$ τότε $\bar{\mathscr{B}}^m = \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $\lambda^* = \bar{\lambda}$.
Το μέτρο $\bar{\lambda} = \lambda^*$ στον $(\mathbb{R}^m, \bar{\mathscr{B}}^m) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ ονομάζεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη. Δες [12] □

Άλλες ιδιότητες του μέτρου Lebesgue λ στο $\mathbb{R}^m$ φαίνονται στα παρακάτω:

Θεώρημα 1.2.2.

1. *$\lambda(K) < +\infty$ για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^m$*

2. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ ισχύει $\lambda^*(A) = inf\{\lambda(U) : U$ ανοικτό $\subset \mathbb{R}^m$ με $U \supset A\}$ και συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U_ϵ του $\mathbb{R}^m$ εις τρόπον ώστε: $U_\epsilon \supset A$ και $\lambda^*(U_\epsilon \setminus A) < \epsilon$.*

3. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ ισχύει $\lambda^*(A) = sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές υποσύνολο του $A\}$ και άρα αν $\lambda^*(A) < \infty$ τότε $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset \mathbb{R}^m$ εις τρόπον ώστε $K_\epsilon \subset A$ και $\lambda^*(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon$.*

4. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ υπάρχει ένα F_σ-σύνολο E και ένα G_δ-σύνολο H εις τρόπον ώστε $E \subset A \subset H$ και $\lambda(E) = \lambda^*(A) = \lambda(H)$.Προφανώς $\lambda(H \setminus E) = 0$.*

Οι παραπάνω ιδιότητες του μέτρου Lebesgue αναφέρονται στην τοπολογική δομή του $\mathbb{R}^m$.Οι επόμενες στην αλγεβρική δομή του.

Θεώρημα 1.2.3.

1. *Αν $A \subset \mathbb{R}^m$ και $x \in \mathbb{R}^m$ τότε ισχύει:*

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathscr{B}^m) \Leftrightarrow A + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathscr{B}^m).$$

2. *$\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}^m$.*

3. *Αν μ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ με $\mu(K) < +\infty$ για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^m$ και ισχύει $\mu(I + x) = \mu(I)$ για κάθε "διάστημα" $I \subset \mathbb{R}^m$ και $x \in \mathbb{R}^m$ τότε υπάρχει σταθερά $a \geq 0$ εις τρόπον ώστε $\mu(A) = a\lambda(A), \forall A \in \mathscr{B}^m$.*

Το τελευταίο Θεώρημα δηλώνει ότι το μέτρο Lebesgue στο $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ είναι το "μοναδικό" (παρά μια πολλαπλασιαστική σταθερα) μέτρο Haar που (οφείλει να) υπάρχει στην "τοπικά συμπαγή Τοπολογική αβελιανή ομάδα" $(\mathbb{R}^m, +)$.

Το επόμενο θεώρημα αφορά σε κατασκευή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Προηγουμένως όμως ο ορισμός:

Ορισμός 1.2.4. *Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** όταν και μόνο όταν είναι αύξουσα,δεξιά συνεχής και*
$\lim_{t \mapsto -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \mapsto +\infty} F(t) = 1$.

Αν τώρα F είναι μια σ.κ. ορίζουμε $P_0 : \mathscr{P}^1 \mapsto [0, 1]$ ως εξής:

$$P_0(\emptyset) = 0 \quad \text{και} \quad P_0((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Αποδεικνύεται ότι το ζεύγος $(\mathscr{P}^1, P_0)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος 1.1.26, δηλαδή τις (α′),(β′) και συμπληρωμένη (γ′). Συνεπώς:

Θεώρημα 1.2.5. *Δοθείσης μιας σ.κ. F, υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ εις τρόπον ώστε $P((a, b]) = F(b) - F(a)$ για όλα τα $a < b$ στο $\mathbb{R}$.*

Παρατήρηση 1.2.6. Το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα,δηλαδή: Δοθέντος ενός μέτρου πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ υπάρχει μια μοναδική σ.κ. εις τρόπον ώστε $P((a, b]) = F(b) - F(a)$.
Πρόκειται βέβαια για την $F(t) = P((-\infty, t]),\ t \in \mathbb{R}$.

Ώστε η σχέση $P((a, b]) = F(b) - F(a)$ ορίζει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου μέτρων πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ και του συνόλου των συναρτήσεων κατανομής στο $\mathbb{R}$.Εν συντομία μέτρα πιθανότητας και συναρτήσεις κατανομής στο $\mathbb{R}$ "ταυτίζονται".

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι $card\mathscr{B}^1 = c$. Από την άλλη $card\mathscr{P}(\mathbb{R}) = 2^c$ και αφού $c < 2^c$ συμπαιρένουμε ότι $\mathscr{B}^1 \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.Μήπως όμως είναι $\mathcal{M}_{\lambda^*} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ (;) Η απάντηση είναι **ΟΧΙ**. Ακριβέστερα:

Θεώρημα 1.2.7. *Υπάρχει υποσύνολο $A \subset (0, 1)$ εις τρόπον ώστε $A \notin \mathcal{M}_{\lambda^*}$.*

Απόδειξη. Δες [12] □

Ισχύει όμως κάτι γενικότερο,γνωστό ως θεώρημα Banach–Kuratowski

Θεώρημα 1.2.8. *(Banach-Kuratowski)*
Δεν υπάρχει μέτρο μ ορισμένο για όλα τα υποσύνολα του $I = [0, 1]$ (δηλ.στον $(I, \mathscr{P}(I))$) που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις $\mu(I) = 1$ και $\mu(\{x\}) = 0\ \forall x \in I$.

Απόδειξη. Δες [10] □

Αξίζει να επισημάνουμε ότι στην **απόδειξη** και των δύο παραπάνω θεωρημάτων χρησιμοποιείται το Αξίωμα Επιλογής (ή άλλα ισοδύναμα) πράγμα που εγείρει αξιοσημείωτα ζητήματα Μαθηματικής λογικής.

Είναι απαραίτητο το Αξίωμα της Επιλογής για να υπάρχουν μη-μετρήσιμα σύνολα; Ο Solovay το 1965 απέδειξε το εξής:
Η διατύπωση: Όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα,δηλαδή $\mathcal{M}_{\lambda^*} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ είναι consistent με την Αξιωματική Zermelo-Frankel χωρίς το Αξίωμα Επιλογής

Ένα άλλο ζήτημα είναι το $card\mathcal{M}_{\lambda^*}$.Σχετικά με αυτό παραθέτουμε τα εξής:
Το σύνολο Cantor $B = [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \setminus (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \setminus ...$ ή καλύτερα
$B = \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n = 0 \text{ ή } 2 \right\}$. Είναι γνωστό ότι έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Είναι κλειστό
- Έχει μέτρο $\lambda(B) = 0$ και $cardB = c$.

Συνεπώς όλα τα υποσύνολά του έχουν μέτρο Lebesgue μηδέν και άρα ανήκουν στην $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ δηλαδή $\mathscr{P}(B) \subset \mathcal{M}_{\lambda^*}$.
Αφού $card(B) = c$ θα είναι $card\mathscr{P}(B) = 2^c$ και συνεπώς $card\mathcal{M}_{\lambda^*} = 2^c$.
Θυμηθείτε τώρα ότι $card\mathscr{B}^1 = c$ και συμπεράνετε ότι υπάρχει $\Gamma \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ με $\Gamma \notin \mathscr{B}^1$. Η κατασκευή ενός τέτοιου συνόλου είναι πολύ δυσκολότερο ζήτημα και μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των "Suslin sets ".

1.3 Μετρήσιμες Απεικονίσεις

Ορισμός 1.3.1. *Έστω μετρήσιμοι χώροι $(X, \mathscr{F})$ και $(Y, \mathscr{H})$.Μια απεικόνιση $f : X \mapsto Y$ ονομάζεται $\mathscr{F} - \mathscr{H}$* **μετρήσιμη** *όταν και μόνο όταν $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ για κάθε $B \in \mathscr{H}$.*

Πρόταση 1.3.2. *Στα πλαίσια του ορισμού υποθέτουμε ότι $\mathscr{H} = \sigma(\mathscr{E})$.Τότε ισχύει: Η f είναι $\mathscr{F} - \mathscr{H}$ μετρήσιμη όταν και μόνο όταν $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ για κάθε $B \in \mathscr{E}$.*

Απόδειξη. Η κλάση $\mathscr{A} = \{B \in \mathscr{H} : f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$ εύκολα επαληθεύεται ότι είναι σ-άλγεβρα και αφού $\mathscr{A} \supset \mathscr{E}$ έχουμε ότι $\mathscr{A} \supset \mathscr{H}$. □

Πρόταση 1.3.3. *Στα πλαίσια του ορισμού υποθέτουμε ότι Y είναι μετρικός χώρος με μετρική d και ότι $\mathscr{H} = \sigma(\mathscr{E})$ όπου $\mathscr{E}$ το σύνολο των ανοικτών (δηλαδή η $\mathscr{H}$ είναι η σ-άλγεβρα Borel).*
Έστω ακολουθία $\mathscr{F} - \mathscr{H}$ μετρήσιμων απεικονίσεων $f_n : X \mapsto Y$, $n \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι για την $f : X \mapsto Y$ ισχύει :$f(x) = \overset{d}{\lim\limits_n} f_n(x)$ για κάθε $x \in X$.Τότε η $f : X \mapsto Y$ είναι $\mathscr{F} - \mathscr{H}$ μετρήσιμη.

Απόδειξη. (Σύντομη):
Για τυχόν ανοικτό $U \in \mathscr{E}$ θέτουμε $U_k = \{y \in Y : d(y, U^c) > \frac{1}{k}\}$, $k = 1, 2, ...$Τότε $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ και συνεπώς $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f^{-1}(U_k)$.
Όμως $f^{-1}(U_k) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n \geq m} f_n^{-1}(U_k)$ και $U_k \in \mathscr{E}$.

□

Ο συμβολισμός που ακολουθεί χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Ορισμός 1.3.4. *Έστω τυχόν σύνολο $X \neq \emptyset$ και $(Y, \mathscr{H})$ μετρήσιμος χώρος. Έστω ακόμα $\Gamma \subset Y^X$ μη-κενό σύνολο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X και πεδίο τιμών το Y. Ως **σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις συναρτήσεις Γ** ορίζεται η*

$$\sigma(\Gamma) = \sigma(\{f^{-1}(A) : f \in \Gamma, A \in \mathscr{H}\})$$

Πρόκειται βέβαια για την ελάχιστη σ-άλγεβρα (με την έννοια του $\subset$) που καθιστά μετρήσιμες τις συναρτήσεις Γ. Εύκολα επαληθεύεται ότι· αν $\mathscr{H} = \sigma(\mathscr{E})$ τότε

$$\sigma(\Gamma) = \sigma(\{f^{-1}(A) : f \in \Gamma, A \in \mathscr{E}\})$$

1.4 Μέτρο Γινόμενο

Έστω χώροι μέτρου $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ όπου μ_1, μ_2 είναι **σ-πεπερασμένα** μέτρα.Θέτουμε:

$$\mathscr{C} = \{A \times B : A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\}$$

Έυκολα επαληθεύεται ότι η κλαση $\mathscr{C}$ είναι ημιάλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega_1 \times \Omega_2$ (ημιδακτύλιος που περιλαμβάνει το $\Omega_1 \times \Omega_2$).Ονομάζεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$.Η σ-άλγεβρα γινόμενο σημειώνεται συμβολικά $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$. Είναι δηλαδή:

$$\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 \equiv \sigma(\mathscr{C}) = \sigma\left(\{A \times B : A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\}\right)$$

και ο μετρήσιμος χώρος $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$ ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος γινόμενο** των $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$.

Άσκηση 5. Έστω $E \subset \Omega_1 \times \Omega_2 : E \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$.Για τυχόν $x \in \Omega_1$ ορίζουμε $E_x = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in E\}$.Όμοια για τυχόν $y \in \Omega_2, E^y = \{x \in \Omega_1 : (x, y) \in E\}$. Δείξτε ότι $E_x \in \mathscr{F}_2, E^y \in \mathscr{F}_1$ για όλα τα x, y.
(Υπόδειξη:Θεωρείστε την κλάση: $\mathscr{A} = \{A \subset \Omega_1 \times \Omega_2 : A_x \in \mathscr{F}_2 \ \forall x\}$.Δείξτε ότι η $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα και ότι $\mathscr{A} \supset \mathscr{C}$.)

Ορίζουμε τώρα την $\nu_0 : \mathscr{C} \mapsto [0, \infty]$ ως εξής:

$$\nu_0(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

με την παραδοχή $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0, \ \infty \cdot \infty = \infty$
Αποδεικνύεται ότι η ν_0 ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.1.25 δηλαδή

ικανοποιεί τις (α′),(β′),(γ′) και συνεπώς επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$.**Η υπόθεση του σ-πεπερασμένου** των μέτρων μ_1, μ_2 είναι κρίσιμη για την μοναδικότητα.Με μορφή θεωρήματος ισχύει:

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ χώροι μέτρου όπου μ_1, μ_2 είναι σ-πεπερασμένα.Τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο ν στον $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$ εις τρόπον ώστε να ισχύει:*

$$\nu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B) \text{ για όλα τα } A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2.$$

Το μέτρο ν είναι σ-πεπερασμένο και ονομάζεται **μέτρο γινόμενο** *των μ_1, μ_2. Συμβολικά $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$.*

Παρατήρηση 1.4.2. Ο χώρος μέτρου $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ **δεν** είναι κατανάγκη πλήρης ακόμα και όταν οι χώροι μέτρου $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i), i = 1, 2$ είναι πλήρεις.Αυτό καθίσταται φανερό από την παρακάτω συλλογιστική:

> Έστω $E \subset \Omega_1$ με $E \notin \mathscr{F}_1$ και $\Lambda \subset \Omega_2$ με $\Lambda \neq \emptyset, \Lambda \in \mathscr{F}_2$ και $\mu_2(\Lambda) = 0$. Ισχύει τώρα ότι $E \times \Lambda \subset \Omega_1 \times \Lambda$ και $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Omega_1 \times \Lambda) = \mu_1(\Omega_1) \cdot \mu_2(\Lambda) = 0$ οπότε αν υποτεθεί πληρότητα τότε θα έχουμε $E \times \Lambda \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ (δες σελ. 6).Όμως τότε για τυχόν $y \in \Lambda$ ισχύει $(E \times \Lambda)^y = E \in \mathscr{F}_1$ Άτοπο.

Άσκηση 6. Αν$(\Omega_1, \bar{\mathscr{F}}_1, \bar{\mu_1}), (\Omega_2, \bar{\mathscr{F}}_2, \bar{\mu_2})$ είναι η πλήρωση των χώρων $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i)$ αντίστοιχα και $(\Omega_1 \times \Omega_2, \overline{\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2}, \overline{\mu_1 \otimes \mu_2})$ η πλήρωση του χώρου γινόμενο για το μέτρο $\mu_1 \times \mu_2$ δείξτε ότι:

i. $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 \subset \bar{\mathscr{F}}_1 \otimes \bar{\mathscr{F}}_2 \subset \overline{\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2}$.

ii. $(\overline{\mu_1 \otimes \mu_2})(E) = (\bar{\mu_1} \otimes \bar{\mu_2})(A)$ όταν $A \in \bar{\mathscr{F}}_1 \otimes \bar{\mathscr{F}}_2$

iii. $\overline{\bar{\mathscr{F}}_1 \otimes \bar{\mathscr{F}}_2} = \overline{\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2}$.

Τα παραπάνω εξειδικεύονται για το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^m$.Υπενθυμίζουμε ότι το $\bar{\lambda} = \lambda^*$ στον $(\mathbb{R}^m, \bar{\mathscr{B}}^m) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ ονομάζεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^m$ (δες σελ. 12).Για λόγους ευκολίας στη γραφή θα σημειώνουμε απλά λ_m το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα 1.4.3. *Αν $k, \ell \in \mathbb{N}$ και $k + \ell = m$ τότε στον $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ ισχύουν:*

1. $\mathscr{B}^k \otimes \mathscr{B}^\ell = \mathscr{B}^m$
2. $\bar{\mathscr{B}}^k \otimes \bar{\mathscr{B}}^\ell \subset \bar{\mathscr{B}}^m$ *(οι πληρώσεις για τα $\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_m$ αντίστοιχα).*
3. $\overline{(\bar{\mathscr{B}}^k \otimes \bar{\mathscr{B}}^\ell)} = \bar{\mathscr{B}}^m$ *(η πλήρωση στο α′ μέλος για το μέτρο $\lambda_k \otimes \lambda_\ell$).*
4. $\lambda_m = \overline{\lambda_k \otimes \lambda_\ell}$.

Για τα μέτρα γινόμενα και το μέτρο Lebesgue συμβουλευτείτε το [12]

Το επόμενο αποτέλεσμα αν και εξειδικευμένο σε μέτρα πιθανότητας γενικεύει το προηγούμενο από άλλη σκοπιά.Προκειμένου να αναπτυχθεί χρειαζόμαστε την έννοια της transition probability ή measurable kernel.

Ορισμός 1.4.4. *Έστω μετρήσιμοι χώροι $(X, \mathscr{A})$ και $(Y, \mathscr{B})$.Ονομάζεται* ***πιθανότητα μεταφοράς*** *(ή μετρήσιμος πυρήνας) μια συνάρτηση $K : X \times \mathscr{B} \mapsto \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις:*

1. *Για κάθε $x \in X$ η $K(x, \cdot)$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(Y, \mathscr{B})$.*
2. *Για κάθε $B \in \mathscr{B}$ η $K(\cdot, B)$ είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση από το X στο $\mathbb{R}$*

Παράδειγμα 1.4.5.

1. $(X, \mathscr{A}) = (Y, \mathscr{B}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ και $\sigma > 0$
$$K(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}, A \in \mathscr{B}^1.$$
2. $(X, \mathscr{A})$ οποιοσδήποτε και $(Y, \mathscr{B}, Q)$ χώρος πιθανότητας
$$K(x, A) = Q(A), \quad x \in X, \; A \in \mathscr{B}.$$
3. Όπως πριν, χωρίς το μετρο Q
$$K(x, A) = \delta_x(A), \quad x \in X, \; A \in \mathscr{B}.$$

Θεώρημα 1.4.6. *Έστω $(X, \mathscr{A}, P_1)$ χώρος πιθανότητας και $(Y, \mathscr{B})$ μετρήσιμος χώρος.Έστω $K(x, B), \; (x, B) \in X \times \mathscr{B}$ πιθανότητα μεταφοράς.Τότε υπάρχει ένα και μόνο μέτρο πιθανότητας P στον $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ εις τρόπον ώστε:*
$$P(A \times B) = \int_A K(x, B) dP_1(x) \text{για όλα τα} A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}.$$
(και συνεπώς για τυχόν $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} : P(E) = \int_X K(x, E_x) dP_1(x)$).

Παρατήρηση 1.4.7. Αν P_2 μέτρο πιθανότητας στον $(Y, \mathscr{B})$ και αν πάρουμε $K(x, \Gamma) = P_2(\Gamma)$ για $x \in X, \Gamma \in \mathscr{B}$ τότε για το μέτρο P έχουμε
$$P(A \times B) = \int_A P_2(B) dP_1(x) = P_1(A) \cdot P_2(B)$$
και άρα $P = P_1 \otimes P_2$ δηλαδή ξαναβρίσκουμε το προηγούμενο θεώρημα (για μέτρα πιθανότητας).

Κεφάλαιο 2

Μέτρα σε Τοπολογικούς Χώρους Hausdorff

2.1 Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός 2.1.1. *Ονομάζεται* **τοπολογικός χώρος** *ένα ζεύγος* $(X, \mathcal{T})$ *όπου* $X \neq \emptyset$ *και* $\mathcal{T}$ *μια κλάση υποσυνόλων του* X *που ικανοποιεί τα παρακάτω:*

i. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

ii. Αν $V_i \in \mathcal{T}$ *για* $i = 1, 2, ...n$ *τοτε* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{T}$

iii. Αν $V_i \in \mathcal{T}$ *για* $i \in I$ *τότε* $\bigcup\limits_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}$ *(για αυθαίρετο σύνολο δεικτών* I*).*

Τα υποσύνολα του X *που ανήκουν στην* $\mathcal{T}$ *ονομάζονται* **ανοικτά** *(για την τοπολογία* $\mathcal{T}$*).Μια* **βάση της τοπολογίας** $\mathcal{T}$ *ονομάζεται μια κλάση* $\mathscr{E} \subset \mathcal{T}$ *που ικανοποιεί την παρακάτω απαίτηση:*

> *Κάθε ανοικτό* $U \in \mathcal{T}$ *μπορεί να γραφεί σαν ένωση υποσυνόλων από την* $\mathscr{E}$ *(με την παραδοχή* $\bigcup\limits_{i \in \emptyset} E_i = \emptyset$*)*

Αν $\mathscr{E}$ *είναι βάση της τοπολογίας* $\mathcal{T}$ *τότε για κάθε* $x \in X$ *ορίζουμε* $\mathcal{N}_x = \{U \in \mathscr{E} : x \in U\}$ *και η κλάση* $\mathcal{N}_x$ *είναι μια τοπική βάση στο* x *της τοπολογίας* $\mathcal{T}$*. Γενικά* **περιοχή του** $x \in X$ *ονομάζεται ένα σύνολο* $A \subset X$ *για το οποίο υπάρχει* $U \in \mathcal{T}$ *με* $x \in U \subset A$ *και* **τοπική βάση** *στο* $x \in X$ *ονομάζεται μια οικογένεια ανοικτών* $\mathcal{N}_x$ *που περιέχουν το* x *και για κάθε περιοχή* A *του* x *υπάρχει* $U \in \mathcal{N}_x$ *με* $U \subset A$*.*

Πρόταση 2.1.2. $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ *για κάθε* $x \in A$ *υπάρχει* $U \in \mathcal{N}_x$ *με* $U \subset A$*.*

Η επόμενη Πρόταση μας παρέχει ένα τρόπο κατασκευής τοπολογίας με επιθυμητή βάση.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{E}$ κλάση υποσυνόλων του X που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

1. $\bigcup\{A : A \in \mathscr{E}\} = X$

2. *Αν $A, B \in \mathscr{E}$ και $x \in A \cap B$ τότε υπάρχει $\Gamma \in \mathscr{E}$ με $x \in \Gamma$ και $\Gamma \subset A \cap B$.*

Τότε υπάρχει μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X εις τρόπον ώστε κάθε $A \in \mathcal{T}$ να γράφεται ως ένωση υποσυνόλων από την $\mathscr{E}$ η οποία αποτελεί και βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$.

Έτσι μια τοπολογία είναι δυνατόν να προσδιοριστεί μονοσήμαντα αν για έκαστο $x \in X$ μας δοθεί οικογένεια υποσυνόλοων $\mathcal{N}_x$ εις τρόπον ώστε η κλάση $\mathcal{E} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{N}_x$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της παραπάνω Πρότασης.

Παράδειγμα 2.1.4. Έστω X μετρικός χώρος με απόσταση d, δηλαδή $d : X \times X \mapsto [0, \infty)$ με τις ιδιότητες:

1. $d(x, y) = d(y, x)$

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z.$

Για τυχόντα $x \in X, r > 0$ σημειώνουμε $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$
Θέτουμε $\mathscr{E} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$.
Τότε η $\mathscr{E}$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις της παραπάνω Πρότασης και συνεπώς "παράγει" μια τοπολογία $\mathcal{T}$ για την οποία η $\mathscr{E}$ είναι βάση.
Σύμφωνα με την Πρόταση της προηγούμενης σελίδας $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r > 0 : B(x, r) \subset A$.
(Προφανώς ο r μπορεί να επιλεγεί ρητός).

Παρατήρηση 2.1.5.

1. Ο αναγνώστης οφείλει να παρατηρήσει ότι μιλούμε για **μια** βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ και εννοούμε με αυτό ότι μια τοπολογία μπορεί να έχει περισσότερες της μίας βάσεις.Επίσης δύο κλάσεις $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ υποσυνόλων του X που ικανοποιούν τις απαιτήσεις της Πρότασης μπορούν να παράγουν την ίδια τοπολογία π.χ. στην περιπτωση ενός μετρικού χώρου (X, d) θεωρούμε την $\mathscr{E} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ και την $\mathscr{E}' = \{B(x, r) : x \in X, r \in \mathbb{Q}^+\}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι παράγουν τοπολογίες $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ που συμπίπτουν και βέβαια οι $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ είναι βάσεις της $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

2. Κάθε τοπολογία $\mathcal{T}$ ορίζει μια αντίστοιχη έννοια σύγκλισης αφού μας επιτρέπει να ορίσουμε: Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ στον X και $x \in X$.Λέγεται ότι $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x \Leftrightarrow$ για κάθε ανοικτό $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$.
Από τον ορισμό προκύπτει ότι όσο 'ευρύτερη" είναι μια τοπολογία τόσο "δυσκολότερη" καθίσταται η σύγκλιση.Είναι δηλαδή δυνατόν να έχουμε $\mathcal{T}_1 \subset$

$\mathcal{T}_2$ όπου $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_1} x$ αλλά να **μην** ισχύει $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_2} x$.
Ο αναγνώστης 'άς διασκεδάσει" με την ακολουθία π.χ. $(1+\frac{1}{n})^n,\ n \in \mathbb{N}$ στον τοπολογικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2 = \mathscr{P}(\mathbb{R}))$.Είναι βέβαια γνωστό ότι στον τοπολογικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ με $\mathcal{T}_1$ παραγόμενη από τη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο e.

Ορισμός 2.1.6. *Έστω Τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$.Ένα σύνολο $A \subset X$ ονομάζεται **κλειστό** $\Leftrightarrow$ A^c είναι ανοικτό (για την $\mathcal{T}$).Το σύνολο των κλειστών του X θα σημειώνεται $\mathscr{G}$.*

Πρόταση 2.1.7. *Σε ένα τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ ισχύουν τα:*

1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $A_1, ...A_n$ κλειστά τότε $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ κλειστό*
2. *Για κάθε σύνολο δεικτών I αν $A_i, i \in I$ είναι κλειστά τότε το σύνολο $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ είναι κλειστό.*

Ορισμός 2.1.8. *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται Hausdorff όταν και μόνο όταν για οποιαδήποτε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ανοικτά $U, V \in \mathcal{T}$ με $x \in U, y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$*

Παράδειγμα 2.1.9. Ένας μετρικός χώρος (X, d) με την τοπολογία που παράγεται από την μετρική d είναι Hausdorff.

Άσκηση 7. Έστω $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff και $\{x_n\} \subset X$ και $x \in X$.Έστω ότι $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ και $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} y$.Δείξτε ότι $x = y$.

Από εδώ και στο εξής εργαζόμαστε **μόνο** με τοπολογικούς χώρους Hausdorff. Σε αυτούς τους χώρους κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι **κλειστό** και κάθε **συμπαγές** υποσύνολο είναι **κλειστό**

Ορισμός 2.1.10. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff .Ένα σύνολο $K \subset X$ ονομάζεται συμπαγές $\Leftrightarrow$ για κάθε ανοικτή κάλυψη του K (δηλ. $U_i \in \mathcal{T}, i \in I$ με $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \supset K$) υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη του K (δηλ. υπάρχουν $U_{i_1}, ...U_{i_n}$ με $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k} \supset K$).Το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του X θα σημειώνεται $\mathscr{K}$.*

Πρόταση 2.1.11.

1. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset X$ είναι κλειστό.*
2. *Αν F κλειστό και K συμπαγές με $F \subset K$ τότε το υποσύνολο F είναι συμπαγές.*
3. *Αν $K_1, ...K_n \in \mathscr{K}$ τότε $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i \in \mathscr{K}$.*

4. *Αν* $K_i \in \mathscr{K}, i \in I$ *τότε* $\bigcap_{i\in I} K_i \in \mathscr{K}$.

Παρατήρηση 2.1.12. Υπενθυμίζουμε ότι στον τοπολογικό χώρο $\mathbb{R}^m$ με τοπολογία παραγόμενη από την μετρική $d(x,y) = |x-y|$ ισχύει:

$K \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ K είναι **κλειστό** και **φραγμένο**.

Ορισμός 2.1.13. *Έστω τοπολογικός χώρος* $(X, \mathcal{T})$ *και* $A \subset X$.
Ορίζουμε $A^o = \bigcup\{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$ *και* $\overline{A} = \bigcap\{F \quad \text{κλειστό} \quad : F \supset A\}$.
Το A^o *ονομάζεται* ***εσωτερικό του*** A *και είναι ανοικτό.*
Το $\overline{A}$ *ονομάζεται* ***θήκη του A*** *και είναι κλειστό.*

Προφανώς $A^o \subset A \subset \overline{A}$

Το $\partial A = \bar{A} \setminus A^o$ *ονομάζεται* ***σύνορο*** *του* A.

2.2 Κανονικά μέτρα σε τοπολογικούς χώρους

Ορισμός 2.2.1. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος.Ονομάζεται σ-άλγεβρα Borel η παραγόμενη από το σύνολο των ανοικτών του* X, *είναι δηλαδή*
$\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T})$.

Άσκηση 8. Έστω $\mathscr{E}$ μια **αριθμήσιμη** βάση του τοπ. χώρου $(X, \mathcal{T})$ τότε $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E})$.

Είναι προφανές ότι η σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}$ ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ περιέχει όλα τα ανοικτά,κλειστά και συμπαγή,δηλαδή $\mathcal{T}, \mathscr{G}, \mathscr{K} \subset \mathscr{B}$.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και σ-άλγεβρα* $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ *όπου* $\mathscr{B}$ *η σ-άλγεβρα Borel.Ονομάζεται* ***μέτρο Borel*** *στον* X *ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο* $(X, \mathscr{B})$.
Ένα μέτρο μ *στον* $(X, \mathscr{A})$ *ονομάζεται* ***κανονικό μέτρο*** *όταν και μόνο όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:*

1. $\mu(K) < +\infty$ *για κάθε συμπαγές* $K \in \mathscr{K}$

2. *Για κάθε* $A \in \mathscr{A}$ *ισχύει:*

$$\mu(A) = inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό με } U \supset A\}$$

3. *Για κάθε ανοικτό* $U \in \mathcal{T}$ *ισχύει:*

$$\mu(U) = sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές με } K \subset U\}$$

Είναι φανερό ότι: Αν δύο κανονικά μέτρα στον $(X, \mathscr{A})$ συμπίπτουν στο $\mathscr{K}$ τότε συμπίπτουν στο $\mathscr{A}$.

Πρόταση 2.2.3. *Έστω τοπ. χώρος* $(X, \mathcal{T})$ *και σ-άλγεβρα* $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$.*Έστω* μ *κανονικό μέτρο στον* $(X, \mathscr{A})$. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Αν* $A \in \mathscr{A}$ *με* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *όπου* $A_n \in \mathscr{A}$ *και* $\mu(A_n) < +\infty$ *(το* A *είναι σ-πεπερασμένου μέτρου* μ*) τότε*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές } \subset A\} \quad (*)$$

Ιδιαίτερα η $(*)$ *ισχύει για όλα τα* $A \in \mathscr{A}$ *όταν* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *με* $E_n \in \mathscr{A}$ *και* $\mu(E_n) < +\infty$ *(δηλ. όταν το μέτρο είναι σ-πεπερασμένο).*

2. *Για κάθε* $A \in \mathscr{A}$ *όπως παραπάνω ισχύει:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό } \subset A\}$$

Απόδειξη.

1. (Δες [3] σελ. 208)
2. Φανερό αφού $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}$ και η μ είναι μονότονη.

□

Πρόταση 2.2.4. *Έστω τοπ. χώρος* $(X, \mathcal{T})$ *και μέτρο* μ *στον* $(X, \mathscr{B})$ *που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:*

1. $\mu(A) = sup\{\mu(K) : K$ *συμπαγές* $\subset A\}$ *για κάθε* $A \in \mathscr{B}$.
2. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *με* U_n *ανοικτό και* $\mu(U_n) < +\infty$.

Τότε το μέτρο μ *είναι κανονικό.Ιδιαίτερα το συμπέρασμα ισχύει αν αντί της 2. υποθέσουμε απλώς ότι* $\mu(X) < +\infty$.

Απόδειξη. Για τυχόν συμπαγές $K \in \mathscr{K}$ είναι $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ και συνεπώς $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}$ άρα $\mu(K) \leq \sum_{k=1}^{m} \mu(U_{n_k}) < +\infty$. Ακόμα $\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F$ κλειστό $\subset B\}$ για τυχόν $B \in \mathscr{B}$ αφού $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}$ και μ είναι μονότονη. Αν τώρα το $A \in \mathscr{B}$ είναι υποσύνολο ενός U_k τότε $\mu(U_k \setminus A) = \sup\{\mu(F) : F$ κλειστό $\subset U_k \setminus A\}$ και συνεπώς για τυχόν $\theta > 0$ υπάρχει κλειστό υποσύνολο $F \subset U_k \setminus A$ με

$$\mu(U_k) - \mu(A) - \theta < \mu(F) \leq \mu(U_k) - \mu(A)$$

και γράφοντας $\mu(F) = \mu(U_k) - \mu(U_k \setminus F)$ και $V = U_k \setminus F$ έχουμε

$$\mu(A) \leq \mu(V) < \mu(A) + \theta \quad \text{ όπου } V \text{ ανοικτό } \supset A$$

Από την 2. μπορούμε να έχουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ με $\Gamma_n \in \mathscr{B}$, ξένα μεταξύ τους και $\Gamma_n \subset U_n, n \in \mathbb{N}$. (Αρκεί να πάρουμε $\Gamma_1 = U_1$ και $\Gamma_n = U_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i), n >$

1).Συνεπώς το τυχόν $B \in \mathscr{B}$ μπορεί να γραφεί ως $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B \cap \Gamma_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ όπου $B_n = B \cap \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα μεταξύ τους και $B_n \subset U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω για κάθε B_n και τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $V_n \supset B_n$ εις τρόπον ώστε να ισχύει:

$$\mu(V_n) < \mu(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

θέτοντας $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ έχουμε U ανοικτό $\supset B$ και

$$\mu(B) \leq \mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \mu(B) + \epsilon$$

δηλαδή $\mu(B) = inf\{\mu(U) : U$ ανοικτό $\supset B\}$ για τυχόν $B \in \mathscr{B}$.
Ώστε το μέτρο μ είναι κανονικό.

$\square$

Άσκηση 9. Έστω τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ και **συνεχής** $f : X \mapsto Y$.Έστω κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$ με $\mu(X) < +\infty$ και ορίζουμε:

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}_Y.$$

Τότε το ν είναι κανονικό μέτρο στον $(Y, \mathscr{B}_Y)$ και $\nu(Y) = \mu(X)$.
(Αν το μέτρο μ είναι μέτρο πιθανότητας τότε το μέτρο πιθανότητας ν είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής f).

(Υπόδειξη: Εύκολα επαληθεύεται ότι η ν είναι μέτρο στον $(Y, \mathscr{B}_Y)$. Αφού η f είναι συνεχής θα είναι μετρήσιμη και άρα για τυχόν $B \in \mathscr{B}_Y$ θα είναι $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}_X$ οπότε από Πρόταση 2.2.3. και για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K \subset f^{-1}(B)$ με $\mu(f^{-1}(B) \backslash K_\epsilon) < \epsilon$. Τώρα το σύνολο $f(K_\epsilon)$ είναι συμπαγές στον Y και ισχύει: $\nu(B \setminus f(K_\epsilon)) = \mu[f^{-1}(B \setminus f(K_\epsilon))] = \mu[f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(f(K_\epsilon))] \leq \mu(f^{-1}(B) \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ αφού $K_\epsilon \subset f^{-1}(f(K_\epsilon))$. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε την Πρόταση 2.2.4.)

Πρόταση 2.2.5. *Έστω τοπ.χώρος $(X, \mathcal{T})$ και μ κανονικό μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$.Έστω $I \neq \emptyset$ και $\{U_i, i \in I\} \subset \mathcal{T}$ εις τρόπον ώστε: για οποιαδήποτε $i, j \in I$ υπάρχει $k \in I$ με $U_i \cup U_j \subset U_k$.Τότε ισχύει:*

$$\mu(\bigcup_{i \in I} U_i) = \sup\{\mu(U_i) : i \in I\}$$

Ιδιαίτερα αν $\Lambda \neq \emptyset$ και $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$.
τότε $\mu(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = \sup\left\{\mu(\bigcup\limits_{\lambda \in I} V_\lambda) : i \quad \text{πεπερασμένο υποσύνολο} \subset \Lambda\right\}$.

Απόδειξη. Έστω $s = \sup\{\mu(U_i) : i \in I\}$.Προφανώς $s \leq \mu(\bigcup\limits_{i \in I} U_i)$. Από την άλλη $\mu(\bigcup\limits_{i \in I} U_i) = sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές $\subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i\}$.Όμως για τυχόν $K \in \mathscr{K}$

με $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ ισχύει $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}$ και από υπόθεση υπάρχει $j \in I$ τέτοιο ώστε $\bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k} \subset U_j$ και συνεπώς $\mu(K) \leq \mu(U_j)$ για κάποιο $j \in I$.
Άρα $\mu(K) \leq \sup\{\mu(U_i) : i \in I\} = s$ για κάθε $K \in \mathscr{K}$ με $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ και συνεπώς $\mu(\bigcup_{i \in I} U_i) \leq s$.Όμως ήδη έχουμε $s \leq \mu(\bigcup_{i \in I} U_i)$.Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να πάρουμε $I = \{i \subset \Lambda : i$ πεπερασμένο$\}$, $U_i = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda$ και να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα.

□

Πρόταση 2.2.6. *Έστω μ, ν πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathscr{B})$ όπου X τοπ. χώρος και υποθέτουμε ότι το μ είναι κανονικό, ότι $\mu(X) = \nu(X)$ και ότι $\nu \leq \mu$.Τότε $\nu = \mu$.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν είναι $\nu = \mu$, δηλαδή υπάρχει $A \in \mathscr{B}$ με $\nu(A) < \mu(A)$.Επειδή μ κανονικό για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K \subset A$ με $\mu(A) < \mu(K) + \epsilon$ οπότε για $\epsilon = \mu(A) - \nu(A)$ έχουμε

$$\nu(A) < \mu(K) \text{ με } K \subset A.$$

Από τις σχέσεις :

- $K^c \supset A^c$
- την μονοτονία του μ
- και $\nu \leq \mu$

συμπεραίνουμε ότι $\nu(A^c) \leq \mu(K^c)$.Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες συμπεραίνουμε ότι $\nu(X) < \mu(X)$ - Άτοπο. □

2.3 Μέτρα σε τοπικά συμπαγείς τοπολογικούς χώρους

Ορισμός 2.3.1. *Ένας τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται* **τοπικά συμπαγής** $\Leftrightarrow$ *για κάθε $x \in X$ υπάρχει* ***ανοικτή*** *περιοχή του x με θήκη συμπαγή δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτό $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ και $\overline{U}$ συμπαγές.*

Παράδειγμα 2.3.2. $X = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{T}$ η τοπολογία η παραγόμενη από την μετρική $d(x, y) = |x - y|$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ και $r > 0$ $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$ είναι ανοικτή περιοχή του x με $\overline{B(x, r)}$ συμπαγές.

Χαρακτηριστική ιδιότητα ενός τοπικά συμπαγούς τοπ. χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι η ακόλουθη:

> Έστω **συμπαγές** $K \subset X$ και **ανοικτό** $U \subset X$ με $K \subset U$.Τότε υπάρχει ανοικτό V με $\overline{V}$ συμπαγές εις τρόπον ώστε να ισχύει $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα σχετικό με μέτρα σε τοπικά συμπαγείς τοπ. χώρους είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω τοπ.χώρος $(X,\mathcal{T})$* ***τοπικά συμπαγής*** *με* ***αριθμήσιμη*** *βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$.Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

i. Υπάρχει ακολουθία συμπαγών $\{K_n\} \subset \mathscr{K}$ με $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ (ή όπως λέγεται ο τοπ. χώρος $(X,\mathcal{T})$ είναι σ-compact).

ii. Κάθε μέτρο στον $(X,\mathscr{B})$ με $\mu(K) < +\infty \quad \forall K \in \mathscr{K}$ είναι ένα κανονικό μέτρο.(και λόγω της Πρότασης 2.2.3. ισχύει $\mu(A) = sup\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}$ με $K \subset A\}$ για κάθε $A \in \mathscr{B}$.

Παράδειγμα 2.3.4. $X = \mathbb{R}^m$ και τοπολογία $\mathcal{T}$ παραγόμενη από την μετρική $d(x,y) = |x-y|$.Εύκολα επαληθεύεται ότι η κλάση $\mathscr{E} = \{B(x,r) : x \in \mathbb{Q}^m, r \in \mathbb{Q}$ με $r > 0\}$ είναι αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$.Εξάλλου όπως ήδη είπαμε ο τοπ. χώρος $(X,\mathcal{T})$ είναι τοπικά συμπαγής.Συνεπώς ισχύουν τα συμπεράσματα του παραπάνω θεωρήματος δηλαδή κάθε μέτρο μ στον $(X,\mathscr{B})$ με $\mu(K) < +\infty$ για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^m$ είναι κανονικό (πράγμα που ήδη γνωρίζαμε για το μέτρο Lebesgue.)

Για αποδείξεις δες [6] ή [12]

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το γνωστό ως Riesz Representation θεώρημα για το οποίο χρειαζόμαστε κάποια προαπαιτούμενα. Για αποδείξεις στο [12]
Έστω τοπ. χώρος $(X,\mathcal{T})$ τοπικά συμπαγής και $(Y,\mathcal{T}')$ άλλος τοπ. χώρος.Μια συνάρτηση $f : X \mapsto Y$ λέγεται **συνεχής** για τις τοπολογίες $\mathcal{T},\mathcal{T}' \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ για κάθε $U \in \mathcal{T}'$.Ιδιαίτερα αν $(Y,\mathcal{T}') = (\mathbb{R},\mathcal{T}')$ με $\mathcal{T}'$ την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$ πρόκειται για πραγματικές συναρτήσεις.Μια τέτοια συνάρτηση $f : X \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής όταν και μόνο όταν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$ και το τελευταίο ισοδυναμεί με: $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x τέτοια ώστε $f(U) \subset (f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$.Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : X \mapsto \mathbb{R}$ θα σημειώνεται $C(X,\mathbb{R})$ ή $C(X)$.
Κλειστός φορέας μιας $f \in C(X,\mathbb{R})$ ονομάζεται το σύνολο

$$s(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

Για μια συνεχή $f \in C(X,\mathbb{R})$ η διατύπωση "**το $s(f)$ είναι συμπαγές**" ισοδυναμεί με την διατύπωση **υπάρχει συμπαγές** $K_f \in \mathscr{K}$ **με** $f(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus K_f$.Έστω $K(X)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, δηλαδή:

$$\begin{aligned} K(X) &= \{f \in C(X,\mathbb{R}) : s(f) \text{είναι συμπαγές}\} \\ &= \{f \in C(X) : \exists K \in \mathscr{K} \text{με} f(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus K\} \end{aligned}$$

Το σύνολο $K(X)$ είναι διανυσματικός χώρος για την πρόσθεση συναρτήσεων (αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για $f,g \in K(X)$ ισχύει $f(x)+g(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus K_f \cup K_g$ και ότι το $K_f \cup K_g$ είναι συμπαγές).Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $I : K(X) \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται **θετικό** όταν και μόνο όταν $I(f) \geq 0$ για κάθε $f \in K(X)$ με $f \geq 0$.

Θεώρημα 2.3.5. *(Riesz Representation)*
Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπικά συμπαγής χώρος και ένα θετικό γραμμικό συναρτησοειδές $I : K(X) \mapsto \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό κανονικό μέτρο Borel στον $(X,\mathscr{B})$ εις τρόπον ώστε $I(f) = \int f d\mu$ για κάθε $f \in K(X)$.

Παράδειγμα 2.3.6. $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{T}$ η συνήθης τοπολογία.Ορίζουμε $I : K(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ ως ακολούθως: $I(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx$ όπου το ολοκλήρωμα είναι σύνηθες Riemann (στην πραγματικότητα η ολοκλήρωση γίνεται υπεράνω ενός διαστήματος $[a,b] \supset K_f$).Το συναρτησοειδές είναι γραμμικό και θετικό και άρα ισχύουν τα συμπεράσματα του θεωρήματος,δηλαδή: Υπάρχει ένα κανονικό μέτρο μ στον $(\mathbb{R},\mathscr{B}^1)$ εις τρόπον ώστε $I(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$ για κάθε $f \in K(\mathbb{R})$.Ασφαλώς ουδείς θα εκπλαγεί αν του δηλωθεί ότι το μέτρο μ είναι το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R},\mathscr{B})$.

Εντούτοις δεν δικαιολογούνται υψηλές προσδοκίες από τις καλές ιδιότητες των μέτρων σε τοπικά συμπαγείς τοπολογικούς χώρους ιδίως όταν πρόκειται για διανυσματικούς χώρους με norm και την αντιστοιχη τοπολογία.Διότι:

Θεώρημα 2.3.7. *Αν X είναι το τοπ. διαν. χώρος τοπικά συμπαγής τότε είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Δες [21] σελ. 17. □

2.4 Κατασκευή κανονικών μέτρων

Θα αναπτύξουμε τώρα πέντε αποτελέσματα κατασκευής κανονικών μέτρων σε τοπ. χώρους Hausdorff. Το πρώτο και το τελευταίο είναι μάλλον αποτελέσματα αναγνώρισης κανονικού μέτρου.

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω τοπ. χώρος $(X,\mathcal{T})$ (Hausdorff) και μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathscr{B} \mapsto [0,\infty)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

i. Αν $A,B \in \mathscr{B}$ με $A \cap B = \emptyset$ τότε $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

ii. Αν $A \in \mathscr{B}$ τότε $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές} \subset A\}$

Τότε το μ είναι κανονικό μέτρο στον $(X,\mathscr{B})$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε κατàρχήν ότι για τυχούσα $\{B_n\} \subset \mathscr{B}$ με $B_n \supset B_{n+1}$ και $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ ισχύει

$$\lim_n \mu(B_n) = 0$$

Πράγματι λόγω της (ii.) για τυχόν $\epsilon > 0$ και έκαστο $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν συμπαγή $K_n \in \mathscr{K}$ με $K_n \subset B_n$ και $\mu(B_n - K_n) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$.Προφανώς $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$ και συνεπώς (χαρακτηριστική ιδιότητα των συμπαγών) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\bigcap\limits_{i=1}^{n_0} K_i = \emptyset$.Συνεπώς έχουμε:

$$B_{n_0} = B_{n_0} \setminus \bigcap_{i=1}^{n_0} K_i = \bigcap_{i=1}^{n_0} B_i \setminus \bigcap_{i=1}^{n_0} K_i \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} (B_i \setminus K_i)$$

και άρα

$$\mu(B_{n_0}) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \mu(B_i \setminus K_i) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \epsilon.$$

Όμως η $\{B_n\}$ φθίνουσα άρα $\mu(B_n) < \epsilon \ \forall n \geq n_0$.Επικαλούμενοι τώρα την Άσκηση 2 σελ. 10 συμπεραίνουμε ότι η μ είναι σ-προσθετική,δηλαδή για $\{A_n\} \subset \mathscr{B}$ ξένα μεταξύ τους ισχύει: $\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε την Πρόταση 2.2.4. □

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω τοπ. χώρος Hausdorff και συνολοσυνάρτηση* $\tau : \mathscr{K} \mapsto [0, \infty)$ *που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

i. $K_1 \subset K_2 \Rightarrow \tau(K_1) \leq \tau(K_2)$

ii. $\tau(K_1 \cup K_2) \leq \tau(K_1) + \tau(K_2)$

iii. $\tau(K_1 \cup K_2) = \tau(K_1) + \tau(K_2)$ *όταν* $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

iv. $\forall \epsilon > 0$ *και* $\forall K \in \mathscr{K}$ *υπάρχει ανοικτό* $U \supset K$ *με* $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ *για κάθε* $C \in \mathscr{K}$ *με* $K \subset C \subset U$.

Τότε η τ *επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε ένα κανονικό μέτρο* μ *στον* $(X, \mathscr{B})$.*Αν επιπλέον η* τ *είναι φραγμένη και ισχύει* $sup\{\tau(K) : K \in \mathscr{K}\} = 1$ *τότε το μέτρο* μ *είναι μέτρο πιθανότητας.*

Απόδειξη. Δες παράρτημα Α! □

Παρατήρηση 2.4.3. Για τη συνθήκη $(iv.)$ έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα: Η συνθήκη $(iv.) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \forall K \in \mathscr{K}$ υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $U \supset K$ και $\tau(C) \leq \tau(K) + \epsilon \quad \forall C \in \mathscr{K} : C \subset U$.
Πράγματι αν ισχύει η $(iv.)$ και συνεπώς $\tau(\Lambda) < \tau(K) + \epsilon \quad \forall \Lambda \in \mathscr{K} : K \subset \Lambda \subset U$ και για τυχόν $C \in \mathscr{K}$ με $C \subset U$ έχουμε $K \cup C \in \mathscr{K}$ και $K \subset K \cup C \subset U$ και συνεπώς $\tau(K \cup C) < \tau(K) + \epsilon$ και αφού η τ μονότονη $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$

Ένα ακόμα **σημαντικό** για τη συνέχεια αποτέλεσμα κατασκευής κανονικών μέτρων είναι το ακόλουθο. Η απόδειξη παρατίθεται στο παράρτημα Β΄ και είναι ουσιωδώς αυτή του [16].

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπ. χώρος Hausdorff και* $\mathscr{A}$ *μια άλγεβρα υποσυνόλων του* X *με* $\mathcal{A} \subset \mathscr{B}_X$. *Έστω συνολοσυνάρτηση* $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0, \infty)$ *που ικανοποιεί τις*

i. $\tau(X) = 1$

ii. *Αν* $A, B \in \mathscr{A}$ *με* $A \cap B = \emptyset$ *τότε* $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$ *(απλά προσθετική)*

iii. *Για κάθε* $B \in \mathscr{A}$ *είναι* $\tau(B) = \sup\{\tau(F) : F$ *κλειστό,* $F \in \mathscr{A}, F \subset B\}$

iv. *Για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει συμπαγές* $K_\epsilon \subset X$ *εις τρόπον ώστε* $\tau(B) > 1 - \epsilon$ *για κάθε* $B \in \mathscr{A}$ *με* $B \supset K_\epsilon$

v. *Η άλγεβρα* $\mathscr{F}$ *περιέχει μια βάση της τοπολογίας* $\mathcal{T}$.

Τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο (πιθανότητας) μ *στον* $(X, \mathscr{B}_X)$ *που επεκτείνει την* τ.

Απόδειξη. Δες παράρτημα Β′ □

Είναι φανερό ότι το Θεώρημα παραμένει ισχυρό αν η i αντικατασταθεί από την $\tau(X) = a > 0$ και στην iv η ανισότητα $\tau(B) > 1 - \epsilon$ από την $\tau(B) > a - \epsilon$. Στην περίπτωση αυτή βέβαια το μέτρο μ δεν είναι μέτρο πιθανότητας.
Συναφές αποτέλεσμα είναι το γνωστό ως Θεώρημα Henry που παρατίθεται αμέσως.

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπ. χώρος Hausdorff και* $\mathscr{A}$ *μια άλγεβρα υποσυνόλων του* X *με* $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. *Έστω συνολοσυνάρτηση* $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0, \infty)$ *που ικανοποιεί:*

(α′) *Αν* $A, B \in \mathscr{A}$ *με* $A \cap B = \emptyset$ *τότε* $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$ *(απλά προσθετική).*

(β′) *Για κάθε* $A \in \mathscr{A}$ $\tau(A) = \sup\{\tau(K) : K$ *συμπαγές* $\subset A$ *με*$K \in \mathscr{A}\}$.

Τότε η τ *επεκτείνεται σε ένα κανονικό μέτρο* μ *στον* $(X, \mathscr{B})$.*Αν επιπλέον η* $\mathscr{A}$ ***περιέχει μια βάση της τοπολογίας*** $\mathcal{T}$ *τότε το* μ *είναι το μόνο στον* $(X, \mathscr{B})$ *για το οποίο ισχύει* $\mu(A) = \tau(A)$ *για κάθε* $A \in \mathscr{A}$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος Henry μπορεί να βρεθεί στα [15] ή [20] όπου μάλιστα στο υπαρξιακό της κομμάτι δεν χρησιμοποιείται η επιπλέον υπόθεση ότι η άλγεβρα $\mathscr{A}$ περιλαμβάνει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ (αυτή χρησιμοποιείται μόνο για τη μοναδικότητα). Αυτό ίσως οφείλεται στην ισχύ του Λήμματος Zorn που επικαλούνται οι συγγραφείς.
Σχετικά πάντως με τις υποθέσεις του Θεωρήματος Henry , ο αναγνώστης , αφού σημειώσει ότι $\tau(X) < +\infty$, ας παρατηρήσει (εύκολα) ότι $(a') \wedge (\beta') \Rightarrow ii, iii, iv$ του Θεωρήματος 2.4.4. που προηγήθηκε. (με $\tau(B) > \tau(X) - \epsilon$ αντί $\tau(B) > 1 - \epsilon$ στην iv). Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν ισχύει και το αντίστροφο. Σχετική είναι η παρακάτω Παρατήρηση.

Παρατήρηση 2.4.6. Στα πλαίσια του Θεωρήματος Henry οι (γ), (γ′) παρακάτω συνεπάγονται την (β′)

$$(\gamma) \quad \tau(A) = \sup\{\tau(F) : F \text{ κλειστό } \subset A \text{ με } F \in \mathscr{A}\}$$

$$(\gamma)' \quad \forall \epsilon > 0 \text{ υπάρχει συμπαγές } K_\epsilon \in \mathscr{A} \text{ εις τρόπον ώστε } \tau(K_\epsilon) > \tau(X) - \epsilon.$$

Απόδειξη. Από την (a') προκύπτει ότι η τ είναι **απλά** υποπροσθετική. Επίσης για τυχόν $\epsilon > 0$ και τυχόν $A \in \mathscr{A}$ έχουμε από $(\gamma), (\gamma)'$

$$\tau(A \setminus F_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2} \text{ με } F_\epsilon \text{ κλειστό } \subset A \text{ και } F_\epsilon \in \mathscr{A}$$

$$\tau(X \setminus K_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2} \text{ με } K_\epsilon \text{ συμπαγές στο } \mathscr{A}$$

Όμως $A \setminus F_\epsilon \cap K_\epsilon = X \cap A \setminus F_\epsilon \cap K_\epsilon \subset (X \setminus K_\epsilon) \cup (A \setminus F_\epsilon)$
και συνεπώς με $\Lambda = F_\epsilon \cap K_\epsilon$ ισχύει $\tau(A \setminus \Lambda) < \epsilon$.
Όμως $\Lambda = F_\epsilon \cap K_\epsilon \in \mathscr{A}$ και είναι συμπαγές.

□

Το αποτέλεσμα που είναι απαραίτητο για την κατασκευή κανονικών μέτρων πιθανότητας σε τοπ. κυρτούς διαν. τοπ. χώρους είναι το επόμενο. Προηγουμένως θα υπενθυμίσουμε την έννοια του **πλήρως κανονικού τοπολογικού χώρου** (completely regular).

Ορισμός 2.4.7. *Ένας τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται* ***πλήρως κανονικός (completely regular)****$\Leftrightarrow$ είναι Hausdorff και για κάθε $x \in X$ και κάθε κλειστό $F \subset X$ με $x \notin F$ υπάρχει συνεχής $f : X \mapsto [0,1]$ με $f(x) = 1$ και $f(y) = 0$ για κάθε $y \in F$.*

Παράδειγμα 2.4.8. Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρως κανονικός. Αρκεί να θεωρήσουμε την $f(y) = \frac{d(y,A)}{d(x,A)}, y \in X$.

Θεώρημα 2.4.9. *(Prohorov)*
Έστω $(X, \mathcal{T})$ ***πλήρως κανονικός*** *(completely regular) τοπ. χώρος και $C(X)$ το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων.Έστω $\Gamma \subset C(X)$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων που* ***διαχωρίζει σημεία*** *δηλ. για οποιαδήποτε $x \neq y$ του X υπάρχει $f \in \Gamma$ με $f(x) \neq f(y)$.Έστω $\mathscr{A}$ η κλάση των υποσυνόλων του X της μορφής $\{x \in X : (f_1(x), ..., f_n(x)) \in B\}$ όπου $\{f_1, ..., f_n\} \subset \Gamma$ και $B \in \mathscr{B}^n$- η σ-άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}^n$. Η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X (εύκολο) και $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$.Υποθέτουμε τώρα ότι ορίζεται συνολοσυνάρτηση $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0,1]$ με τις παρακάτω ιδότητες:*

i. $\tau(X) = 1$

ii. *Αν $A, B \in \mathscr{A}$ με $A \cap B = \emptyset$ τότε $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$*

iii. *Για κάθε $A \in \mathscr{A}$ ισχύει $\tau(A) = \sup\{\tau(F) : F$ κλειστό $\subset A$ με $F \in \mathscr{A}\}$*

iv. *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές K_ϵ εις τρόπον ώστε: $\tau(B) > 1 - \epsilon$ για κάθε $B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K_\epsilon$.*

Τότε υπάρχει κανονικό μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{B})$ που επεκτείνει την τ και είναι το μοναδικό τέτοιο.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στα παρακάτω Λήμματα των οποίων η απόδειξη θα παρατεθεί στο τέλος.

Λήμμα 2.4.10. *Έστω τοπ. χώρος Hausdorff X και σύνολο συνεχών συναρτήσεων $\Delta \subset \mathbb{R}^X$. Αν μ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(X, \sigma(\Delta))$ τότε για κάθε $A \in \sigma(\Delta)$ είναι*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό } \subset X\ , F \in \sigma(\Delta)\}$$

Λήμμα 2.4.11. *Έστω πλήρως κανονικός τοπ. χώρος X και η σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(X) = \sigma(C(X, \mathbb{R}))$. Τότε η $\mathscr{B}_0(X)$ περιέχει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_X$ του X.*

Λήμμα 2.4.12. *Έστω Y τοπ. χώρος Hausdorff σ-συμπαγής, δηλαδή υπάρχουν συμπαγή $K_n, n \in \mathbb{N}$ με $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ και σύνολο $\Gamma \subset C(Y, \mathbb{R})$ που διαχωρίζει σημεία του Y. Τότε για τη σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(Y) \equiv \sigma(C(Y, \mathbb{R}))$ ισχύει ότι $\mathscr{B}_0(Y) = \sigma(\Gamma)$.*

Για συντομία στις εκφράσεις, μια άλγεβρα που ορίζεται όπως η $\mathscr{A}$ της εκφώνησης θα γράφεται $a(X, \Gamma)$. Είναι δηλαδή $\mathscr{A} = a(X, \Gamma)$. Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$\sigma(\Gamma) = \sigma(a(X, \Gamma)) = \sigma(\mathscr{A})$$

Επίσης εύκολα προκύπτει (από τις ii, iii) ότι για τη συνολοσυνάρτηση τ της εκφώνησης ισχύει:

$$\tau(\Gamma) = \inf\{\tau(U) : U \text{ ανοικτό } \supset \Gamma,\ U \in \mathscr{A}\}\ \ , \Gamma \in \mathscr{A}. \tag{1}$$

Λιγότερο εύκολα προκύπτει επίσης (δες Άσκηση 11 παρακάτω) ότι η συνολοσυνάρτηση τ είναι **σ-προσθετική**.
Έστω τώρα τ^o το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau, \mathscr{A})$. Κατά το Θεώρημα Καραθεοδωρή η τ^o είναι το μοναδικό μέτρο (πιθανότητας) στον $(X, \sigma(\mathscr{A}))$ εις τρόπον ώστε

$$\tau^o|\mathscr{A} = \tau$$

Θα δείξουμε τώρα το εξής βοηθητικό αποτέλεσμα:
Αν K συμπαγές $\subset X$ με $\tau(B) > \lambda\ \forall\ B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K$ τότε $\tau^o(K) \geq \lambda$ όπου $\lambda \in (0, 1)$. Πράγματι για $\delta, \theta > 0$ από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου προκύπτει ότι υπάρχουν $\Gamma_n \in \mathscr{A}$ με $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \supset K$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(\Gamma_n) < \tau^o(K) + \delta \tag{2}$$

Επίσης από την (1) προκύπτουν ανοικτά $U_n \in \mathscr{A}$ με $U_n \supset \Gamma_n$ και
$\tau(U_n) < \tau(\Gamma_n) + \frac{\theta}{2^n}$ οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \tau(\Gamma_n) + \theta \tag{3}$$

Επειδή $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n \supset K$-συμπαγές υπάρχει πεπερασμένο $I \subset \mathbb{N}$ με $V = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \supset K$ και βέβαια $V \in \mathscr{A}$ οπότε

$$\tau(V) > \lambda \tag{4}$$

Είναι προφανές ακόμα ότι

$$\tau(V) = \tau^o(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) \tag{5}$$

Από τις (2),(4),(5) προκύπτει ότι

$$\tau(V) < \tau^o(K) + \theta + \delta$$

και συνεπώς από την (4) ότι

$$\tau^o(K) + \theta + \delta > \lambda \text{ για όλα τα } \theta, \delta > 0$$

που συνεπάγεται το βοηθητικό ζητούμενο.
Τώρα από την υπόθεση iv προκύπτει ότι για έκαστο $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συμπαγές $K_n \subset X$ με $\tau(B) > 1 - \frac{1}{n}$ για όλα τα $B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K_n$. Κατά τα προηγούμενα θα είναι και $\tau^o(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς αν τεθεί $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ τότε

$$\tau^o(Y) = 1$$

Συνεπώς μπορούμε να επικαλεστούμε το Θεώρημα 1.1.29. κατά το οποίο η τ^o ορίζει ένα μέτρο $\tilde{\tau}$ πιθανότητας στον $(Y, \sigma(\mathscr{A})_Y)$ όπου $\sigma(\mathscr{A})_Y = \{\Gamma \cap Y : \Gamma \in \sigma(\mathscr{A})\}$ και $\tilde{\tau}(\Gamma \cap Y) = \tau^o(\Gamma)$. Επίσης κατά την Πρόταση 1.1.28.

$$\sigma(\mathscr{A})_Y = \sigma(\mathscr{A}_Y) \text{ όπου } \mathscr{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathscr{A}\}$$

Θεωρούμε τώρα τον Y εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_X\}$ και την οικογένεια συναρτήσεων $\Gamma_Y = \{f|Y : f \in \Gamma\} \subset C(Y, \mathbb{R})$. Εύκολα φαίνεται ότι $\mathscr{A}_Y = a(Y, \Gamma_Y)$ και συνεπώς ότι

$$\sigma(\mathscr{A})_Y = \sigma(\Gamma_Y)$$

Επειδή ο χώρος Y είναι σ-compact και Γ_Y διαχωρίζει σημεία του Y , κατά το Λήμμα 2.4.12. θα είναι

$$\sigma(\Gamma_Y) = \mathscr{B}_0(Y) - \text{η σ-άλγεβρα Baire του } Y$$

Έχουμε λοιπόν ένα χώρο πιθανότητας $(Y, \mathscr{B}_0(Y), \tilde{\tau})$ για τον οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

α'. $\tilde{\tau}(A) = \sup\{\tilde{\tau}(F) : F \text{ κλειστό} \subset X,\ F \in \mathscr{B}_0(Y)\}$
Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της $\mathscr{B}_0(Y)$ και το Λήμμα 2.4.10. με $\Delta = C(Y, \mathbb{R})$.

β′. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset Y$ με $\tilde{\tau}(A) > 1 - \epsilon$ όταν $A \in \mathscr{B}_0(Y)$ με $A \supset K_\epsilon$.
Πράγματι όπως είδαμε παραπάνω για $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \epsilon$ θα είναι $\tau^o(K_m) > 1-\epsilon$. Συνεπώς για $A \in \mathscr{B}_0(Y)$ με $A \supset K_\epsilon \equiv K_m$ θα είναι $\tilde{\tau}(A) = \tilde{\tau}(A \cap Y) = \tau^o(A) \geq \tau^o(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$

γ′. Η $\mathscr{B}_0(Y)$ παριέχει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_Y$. Αυτό διότι ο χώρος X είναι πλήρως κανονικός και συνεπώς κατά το Λήμμα 2.2.11. η σ-άλγεβρα $\mathscr{B}_0(X)$ περιέχει μια βάση $\mathscr{E}$ της τοπολογίας $\mathcal{T}_X$. Είναι δηλαδή $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}_0(X)$ και συνεπώς $\mathscr{E}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{E}\} \subset \mathscr{B}_0(X)_Y$. Όμως η $\mathscr{E}_Y$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_Y$ και επαληθεύεται εύκολα ότι $\mathscr{B}_0(X)_Y \subset \mathscr{B}_0(Y)$

Από τα (α′),(β′),(γ′) προκύπτει ότι μπορούμε να επικαλεστούμε το Θεώρημα 2.4.4. για την τριάδα $(Y.\mathscr{B}_0(Y), \tilde{\tau})$ και συνεπώς η $\tilde{\tau}$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε κανονικό μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mu}$ στον $(Y, \mathscr{B}(Y))$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι $\mathscr{B}(Y) = \mathscr{B}(X)_Y$ και να ορίσουμε την $\mu : \mathscr{B}(X) \mapsto [0, 1]$ως $\mu(B) = \tilde{\mu}(B \cap Y)$. Εύκολα επαληθεύεται ότι το μ είναι κανονικό μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}(X))$ και επεκτείνει την τ αφού για τυχόν $A \in \mathscr{A}$ είναι $A \cap Y \in \mathscr{B}_0(Y)$ και εκ κατασκευής διαδοχικά

$$\mu(A) = \tilde{\mu}(A \cap Y) = \tilde{\tau}(A \cap Y) = \tau^o(A) = \tau(A)$$

Απομένει η μοναδικότητα της επέκτασης.
Έστω κανονικά μέτρα πιθανότητας μ_1,μ_2 στον $(X, \mathscr{B}(X))$ με $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{A}$. Λόγω κανονικότητας για έκαστο $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συμπαγές $K_n \subset X$ με $\mu_1(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$ και $\mu_2(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$. Θέτουμε $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Τότε $\mu_1(Y) = \mu_2(Y) = 1$.
Ανατρέχουμε στο Θεώρημα 1.1.29. και ορίζουμε μέτρα πιθανότητας $\tilde{\mu}_i$ $(i = 1, 2)$ στην $\mathscr{B}(X)_Y$ ως ακολούθως

$$\tilde{\mu}_i(B \cap Y) = \mu_i(B)$$

Φανερά $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ στην $\mathscr{A}_Y$ οπότε θα είναι και

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 \quad \text{στην} \quad \sigma(\mathscr{A}_Y) \tag{6}$$

Εφοδιάζουμε το Y με την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}_Y$ και εύκολα επαληθεύεται ότι $\mathscr{B}(X)_Y = \mathscr{B}(Y)$ και ότι τα $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ είναι κανονικά μέτρα πιθανότητας στον $(Y, \mathscr{B}(Y))$. Επιπλέον, όπως διαπιστώσαμε παραπάνω $\sigma(\mathscr{A}_Y) = \mathscr{B}_0(Y)$ και ακόμη ότι: η σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(Y)$ περιέχει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_Y$. Επικαλούμενοι την Άσκηση 14 και την (6) συμπεραίνουμε ότι

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 \text{ στην } \mathscr{B}(Y)$$

και συνεπώς ότι $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{B}(X)$. $\square$

Ακολουθεί η απόδειξη των Λημμάτων της αρχής.

Απόδειξη. Λήμμα 2.4.10.
Έστω $A \in \sigma(\Delta)$. Συνδυάζοντας αποτελέσματα των Ασκήσεων 37,27 και 26 που αναπτύσσονται στα Κεφάλαια 3 και 4 και αφορούν σε ιδιότητες σ-αλγεβρών που ορίζονται σε καρτεσιανά γινόμενα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $(\gamma_1, \gamma_2, ...)$ από το Δ εις τρόπον ώστε

$$A = \gamma^{-1}(B) \text{ όπου } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ...) : X \mapsto \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ και } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Φανερά η γ είναι $\sigma(\Delta) - \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ μετρήσιμη και συνεχής για την $\mathcal{T}_X$ και την τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Αν τώρα θεωρήσουμε στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ το μέτρο πιθανότητας

$$\nu(B) = \mu(\gamma^{-1}(B))$$

αυτό είναι κανονικό (γιατί ;) και συνεπώς για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ εις τρόπον ώστε

$$\nu(B \setminus E) < \epsilon$$

και άρα

$$\mu(\gamma^{-1}(B) \setminus \gamma^{-1}(E)) < \epsilon$$

Όμως $\gamma^{-1}(B) = A$ και $\gamma^{-1}(E)$ κλειστό $\subset X$. □

Απόδειξη. Λήμμα 2.4.11.
Έστω τυχόν $z \in X$ και U ανοικτή περιοχή του z. Τότε $z \notin U^c$ και συνεπώς υπάρχει $f \in C(X, \mathbb{R})$ με $f(z) = 1$ και $f(x) = 0 \; \forall x \in U^c$. Προφανώς για το σύνολο $V = \{x \in X : f(x) > 0\}$ ισχύουν:

$$V \text{ ανοικτό και } z \in V \subset U$$

Συνεπώς κάθε ανοικτό γράφεται ως ένωση συνόλων της μορφής $\{x \in X : f(x) > 0\}$ με $f \in C(X, \mathbb{R})$. Όμως τα σύνολα αυτής της μορφής ανήκουν στην σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(X) = \sigma(C(X, \mathbb{R}))$. □

Απόδειξη. Λήμμα 2.4.12.
Επειδή $\Gamma \subset C(Y, \mathbb{R})$ θα είναι και $\sigma(\Gamma) \subset \mathscr{B}_0(Y)$. Έστω τώρα Δ το σύνολο των συναρτήσεων που ορίζονται στο Y και είναι συνεχείς και $\sigma(\Gamma) - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμες. Προφανώς $\Gamma \subset \Delta$ και άρα το Δ διαχωρίζει τα σημεία του Y. Ακόμα περιέχει τις σταθερές και εύκολα επαληθεύεται ότι είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας $C(Y, \mathbb{R})-$ για τις αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Αν τώρα ο χώρος $C(Y, \mathbb{R})$ εφοδιαστεί με την τοπολογία της ομοιόμορφης στα συμπαγή σύγκλισης τότε κατά το Θεώρημα Stone-Weirstrass το Δ είναι πυκνό στον $C(Y, \mathbb{R})$ άρα για κάθε $f \in C(Y, \mathbb{R})$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta$ ώστε για τυχόν συμπαγές $K \subset Y$ να ισχύει

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Επειδή ο χώρος $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ με $K_n \subset Y$ συμπαγή για τυχόν $y \in Y$ θα είναι $y \in K_\ell$ για κάποιο $\ell \in \mathbb{N}$ και άρα $f_n(y) \to f(y)$. Ώστε για κάθε $f \in C(Y, \mathbb{R})$ είναι

$f = \lim_n f_n$ με $f_n \in \Delta$ και συνεπώς κάθε $f \in C(Y, \mathbb{R})$ είναι $\sigma(\Gamma) - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη. Αυτό αρκεί για να συμπεράνουμε ότι

$$\mathscr{B}_0(Y) \subset \sigma(\Gamma).$$

$\square$

Διαβάζοντας προσεκτικά το τελευταίο θεώρημα διαβλέπουμε την πρόθεση κατασκευής κανονικού μέτρου σε απειροδιάστατους χώρους. Φανταστείτε X έναν τοπ. κυρτό τοπ. διαν. χώρο και $\Gamma = X'$ ο δυϊκός του.
Τα τέσσερα θεωρήματα κατασκευής (το Θεώρημα 2.4.1. είναι στην πραγματικότητα θεώρημα αναγνώρισης) κανονικού μέτρου είναι χρήσιμο να τα συνοδεύει και η παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 2.4.13. *Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff (οπωσδήποτε) και ένα* ***πεπερασμένο*** *μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι:*

i. $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό} \subset A\} \quad \forall A \in \mathscr{B}$

ii. $\forall \epsilon > 0\ \exists$ *συμπαγές* K_ϵ *εις τρόπον ώστε* $\mu(K_\epsilon) > \mu(X) - \epsilon$ ***(tightness)***

Τότε το μέτρο μ είναι κανονικό (δες Ορισμό 2.2.2.) και μάλιστα για κάθε $A \in \mathscr{B}$ ισχύει:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές } \subset A\}$$

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε τον τελευταίο ισχυρισμό όπως ακριβώς στην Παρατήρηση 2.4.6. Κατόπιν επικαλούμαστε την Πρόταση 2.2.4. $\square$

Σχηματικά οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να αποδοθούν όπως παρακάτω.
X είναι τοπ. χώρος και $A \in \mathscr{B}$.

1. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό} \supset A\}$
2. $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό} \subset A\}$
3. $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές} \subset A\}$
4. $\forall \epsilon > 0\ \exists$ συμπαγές K με $\mu(K) > \mu(X) - \epsilon$

- Για **πεπερασμένα** μέτρα μ και X **Hausdorff**

$$\begin{array}{c} (3) \Leftrightarrow (2) + (4) \\ \Updownarrow \\ (1) \end{array}$$

- Για **μη πεπερασμένα κανονικά** μέτρα θυμηθείτε την Πρόταση 2.2.4.

Άσκηση 10. Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ και ένα **κανονικό** μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$.Δείξτε ότι το μέτρο $\bar{\mu}$ στον $(X, \overline{\mathscr{B}_\mu})$ είναι **κανονικό**.
(Υπόδειξη: Πρέπει να δειχτεί μόνο ότι $\bar{\mu}(B) = inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό} \subset B\}$ για τυχόν $B = A \cup N$ με $A \in \mathscr{B}$ και $N \in \mathcal{N}_\mu$.

- Αν $\mu(A) = +\infty$ -εύκολο.
- Αν $\mu(A) < +\infty$ τότε για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U_\epsilon \supset A$ με $\mu(A) \leq \mu(U_\epsilon) < \mu(A) + \frac{\epsilon}{2}$

Επίσης για το N υπάρχει $\Lambda \in \mathscr{B}$ με $\Lambda \supset N$ με $\mu(\Lambda) = 0$ και άρα υπάρχει ανοικτό $V_\epsilon \supset \Lambda \supset N$ με $\mu(V_\epsilon) < \mu(\Lambda) + \frac{\epsilon}{2}$.
Τώρα για το ανοικτό $U_\epsilon \cup V_\epsilon \supset B$ ισχύει $\mu(A) \leq \mu(U_\epsilon \cup V_\epsilon) < \mu(A) + \epsilon$. Όμως $\mu(A) = \bar{\mu}(B))$

Άσκηση 11. Έστω τοπ. χώρος Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ και $\mathscr{A}$ άλγεβρα υποσυνόλων του X και $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0,1]$ που ικανοποιεί τις $(i.), (ii.), (iii.), (iv.)$ του Θεωρήματος 2.4.4. Δείξτε ότι:

1. Αν $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ με $U_n \in \mathcal{T}$ τότε $\sup = \{\mu(\bigcup\limits_{i\in J} U_i) : J$ πεπερασμένο $\subset \mathbb{N}\} = 1$.
2. Αν $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ με F_i κλειστά τότε $inf\{\mu(\bigcap\limits_{i\in J} F_i) : J$ πεπερασμένο $\subset \mathbb{N}\} = 0$
3. Η τ είναι σ-προσθετική.

Υπόδειξη: Για τυχόν $\epsilon > 0$ έστω συμπαγές K_ϵ όπως στην $(iv.)$.Αφού $\bigcup\limits_n U_n \supset K$ θα υπάρχει J πεπερασμένο $\subset \mathbb{N}$ με $\bigcup\limits_{i\in J} U_i \supset K$ και συνεπώς $1 \geq \mu(\bigcup\limits_{i\in j} U_i) > 1 - \epsilon$.
Η 2. προκύπτει από 1. για τα F_i^c.
Όσο για την 3. θεωρούμε φθίνουσα $\{B_n\} \subset \mathscr{A}$ με $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ και λόγω $(iii.)$ κλειστά $F_n \subset B_n$ με $F_n \in \mathscr{A}$ και $\tau(B_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{4\cdot 2^n}$ για τυχόν $\epsilon > 0$.Αφού $\bigcap\limits_n F_n = \emptyset$ θα υπάρχει (από 2) ένα πεπερασμένο $J \subset \mathbb{N}$ με $\mu(\bigcap\limits_{i\in J} F_i) < \frac{\epsilon}{2}$.Αν τώρα $n_0 = \max J$ τότε έχουμε $B_{n_0} \setminus \bigcap\limits_{i\in J} F_i = \bigcap\limits_{i\in J} B_i \setminus \bigcap\limits_{i\in J} F_i \subset \bigcup\limits_{i\in J} (B_i \setminus F_i)$ και επειδή η τ είναι απλά υποπροσθετική $\tau(B_{n_0}) - \tau(\bigcap\limits_{i\in J} F_i) \leq \sum\limits_{i\in J} \tau(B_i \setminus F_i) \leq \sum\limits_n \frac{\epsilon}{4\cdot 2^n} = \frac{\epsilon}{2}$ άρα $\tau(B_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2} + \tau(\bigcap\limits_{i\in J} F_i) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Άσκηση 12. Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ που είναι **συμπαγής** (και πάντα Hausdorff).Έστω μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ με $\mu(X) < +\infty$ και $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F$ κλειστό $\subset A\}$. Δείξτε ότι το μ είναι κανονικό.

Άσκηση 13. Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ με την ιδιότητα: $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ όπου $K_n \in \mathscr{K}$ (π.χ. τοπικά συμπαγής με αριθμήσιμη βάση της $\mathcal{T}$) ή όπως αλλιώς λέγεται **σ-συμπαγής** (σ-compact).Δείξτε ότι $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{K})$.

Άσκηση 14. Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ και σ–άλγεβρα $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$.Έστω $\mathscr{E}$ βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ και υποθέτουμε ότι δύο **κανονικά** μέτρα μ, ν στον $(X, \mathscr{A})$ συμπίπτουν στην κλάση $\mathscr{E}_s = \{\bigcup\limits_{i\in a} V_i : a$ πεπερασμένο,$V_i \in \mathscr{E}\}$.Δείξτε ότι τότε συμπίπτουν στην $\mathscr{A}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Πρόταση 2.2.5.

Άσκηση 15. Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ και μ κανονικό μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$.Έστω κλειστά υποσύνολα $\{F_i, i \in I\} \subset \mathscr{G}$ με την ιδιότητα: για οποιαδήποτε $i, j \in I$ υπάρχει $k \in I$ με $F_i \cap F_j \supset F_k$ και υπάρχει $i_0 \in I$ με $\mu(F_{i_0}) < +\infty$.Με τη βοήθεια της Πρότασης 2.2.5. δείξτε ότι: $\mu(\bigcap\limits_{i \in I} F_i) = inf\{\mu(F_i) : i \in I\}$.

Άσκηση 16. Έστω κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{A})$ με $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$.Έστω $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) < +\infty$ και $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ όπου U_i ανοικτά $\subset X$.Τότε υπάρχει **αριθμήσιμο** $J \subset I$ εις τρόπον ώστε $\mu(A \setminus \bigcup\limits_{i \in J} U_i) = 0$.

Άσκηση 17. Έστω κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{A}), \mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ και οικογένεια **ανοικτών** υποσυνόλων $\{U_i, i \in I\}$ με $\mu(U_i) = 0 \;\; \forall i \in I$.Αν $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ τότε $\mu(U) = 0$.

Υπόδειξη: Για τυχόν συμπαγές $K \subset U$ έχουμε $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$ και άρα $\mu(K) = 0$. Όμως $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U\}$.

Άσκηση 18. Έστω κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{A}), \mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ και $\mathscr{E} = \{U \subset X : U$ ανοικτό με $\mu(U) = 0\}$. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση αν $V = \bigcup\{U : U \in \mathscr{E}\}$ τότε $\mu(V) = 0$ και το σύνολο V είναι το ευρύτερο ανοικτό με μ–μέτρο μηδέν. Το σύνολο $S = V^c$ ονομάζεται **φορέας** του μέτρου μ και σημειώνεται $S = supp(\mu)$. Δείξτε ότι:

1. $\mu(S) = \mu(X)$
2. $S = \{x \in X : \mu(V_x) > 0$ για κάθε ανοιχτή περιοχή V_x του $x\}$

Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι αν U ανοικτό με $\mu(U) = 0$ τότε $U \subset S$.

Άσκηση 19. Στον ορισμό του κανονικού μέτρου (σελίδα 22) δείξτε ότι η συνθήκη $(i.)$ $\mu(K) < \infty$ για κάθε $K \in \mathscr{K}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $(i.')$: Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή περιοχή V_x με $\mu(V_x) < +\infty$.

Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συμπαγές.

2.5 Μέτρα σε μετρικούς τοπολογικούς χώρους

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Για τυχόντα $x \in X$ και $r > 0$ σημειώνουμε $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Όπως ήδη είδαμε η κλάση $\mathscr{E} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ είναι **βάση** της τοπολογίας του. Επίσης η κλάση υποσυνόλων $\mathscr{E}' = \{B(x, r) : x \in X, r$ ρητός $> 0\}$ είναι μια βάση. Ακόμα για έκαστο $x \in X$ η κλάση $\mathcal{N}_x = \{B(x, r), r > 0\}$ είναι τοπική βάση περιοχών του x και συνεπώς η κλάση $\mathcal{N'}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι τοπική βάση περιοχών του x. Η τελευταία είναι **αριθμήσιμη** και συνεπώς **κάθε** μετρικός χώρος είναι first countable. Ένας μετρικός χώρος λέγεται second countable όταν και μόνο όταν διαθέτει μια **αριθμήσιμη** βάση για την τοπολογία του (την παραγόμενη από την μετρική d). Τέλος ένας μετρικός χώρος ονομάζεται **διαχωρίσιμος** (separable) όταν και μόνο όταν υπάρχει **αριθμήσιμο** $D \subset X$ τέτοιο ώστε $\bar{D} = X$. Ισχύει το παρακάτω:

Πρόταση 2.5.1. *Αν ο μετρικός χώρος (X, d) είναι διαχωρίσιμος τότε έχει μια αριθμήσιμη βάση (είναι second countable).*

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή η αριθμήσιμη βάση είναι η
$\mathscr{E} = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in D, n \in \mathbb{N}\}$.
Με χρήση του αξιώματος επιλογής αποδεικνύεται εύκολα και το αντίστροφο.

Ένας μετρικός χώρος είναι πάντοτε:

- normal δηλαδή: για οποιαδήποτε κλειστά E, F με $E \cap F = \emptyset$ υπάρχουν ανοικτά U, V με $U \supset E,\ V \supset F$ και $U \cap V = \emptyset$.

Συνεπώς είναι και:

- κανονικός (regular) δηλαδή: για οποιοδήποτε κλειστό F και $x \notin F$ υπάρχουν ανοικτά U, V με $U \supset F,\ x \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

Σε ένα μετρικό χώρο ισχύει το:

Λήμμα 2.5.2. *(Urysohn)*
Για οποιαδήποτε κλειστά E, F με $E \cap F = \emptyset$ υπάρχει συνεχής $f : X \mapsto [0, 1]$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in E$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in F$.

Συνεπώς κάθε μετρικός χώρος είναι:

- πλήρως κανονικός (completely regular) δηλαδή: για οποιοδήποτε κλειστό F και $x \notin F$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \mapsto [0, 1]$ με $f(x) = 1$ και $f(y) = 0$ για κάθε $y \in F$.

Ορισμός 2.5.3. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται:*

- ***πλήρης*** *όταν και μόνο όταν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει (για τη μετρική d).*
- ***ολικά φραγμένος*** *όταν και μόνο όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο $F \subset X$ εις τρόπον ώστε: $X = \bigcup_{y \in F} B(y, \epsilon)$.*

Πρόταση 2.5.4. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής όταν και μόνο όταν είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Έστω τώρα (X, d) μετρικός χώρος και $\mathcal{T}$ η παραγόμενη τοπολογία. Έστω $C(X)$ το σύνολο όλων των **συνεχών, πραγματικών** συναρτήσεων που ορίζονται στον X, δηλαδή:

$$C(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{R}, f \text{ συνεχής}\}$$

Επίσης $C_b(X)$ το σύνολο των **συνεχών, φραγμένων** πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο X, δηλαδή:

$$C_b(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{R}, f \text{ συνεχής, φραγμένη}\}$$

Ορίζουμε τις παρακάτω κλάσεις υποσυνόλων του X:

$$\mathscr{A}_1 = \{f^{-1}(U) : f \in C(X), U \text{ ανοικτό} \subset \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{A}_2 = \{f^{-1}(U) : f \in C_b(X), U \text{ ανοικτό} \subset \mathbb{R}\}$$

Πρόταση 2.5.5. *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $\mathcal{T}$ η παραγόμενη τοπολογία. Έστω $\mathscr{B}$ η σ-άλγεβρα Borel δηλαδή: $\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T})$.*
Τότε $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A}_1) = \sigma(\mathscr{A}_2)$.

Απόδειξη. Δες π.χ. [10] □

Σε ένα οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο (όχι κατὰνάγκη μετρικό) η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{A}_1)$ συμπίπτει με την **σ-άλγεβρα** Baire $\mathscr{B}_0 \equiv \sigma(C(X, \mathbb{R}))$ και τούτο διότι $\mathscr{B}^1 = \sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ όπου $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ τα ανοικτά του $\mathbb{R}$. Ώστε στους πλήρεις μετρικούς χώρους $\mathscr{B} = \mathscr{B}_0$.

Πρόταση 2.5.6. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) με την τοπολογία $\mathcal{T}$ και $\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T})$ η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του. Αν μ είναι πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$ τότε ισχύουν:*

1. *Για κάθε $A \in \mathscr{B}$*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό} \subset A\} = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό} \supset A\}.$$

2. *Αν το μέτρο μ είναι tight, δηλαδή αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές K_ϵ με $\mu(X \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ τότε το μέτρο μ είναι κανονικό*
(συνεπώς εκτός των παραπάνω ισχύει:
$\mu(A) = sup\{\mu(K) : K \text{συμπαγές} \subset A\}$).

Απόδειξη.

1. Δες [10]

2. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.4.13.

□

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ σημαντικό για τη Θεωρία Πιθανοτήτων:

Θεώρημα 2.5.7. *(Ulam , Prohorov)*
*Έστω ένας **πλήρης,διαχωρίσιμος μετρικός** χώρος (X, d). Κάθε **μέτρο πιθανότητας** στον $(X, \mathscr{B})$ είναι **tight** (και συνεπώς κανονικό).*

Απόδειξη. Δες [10]

□

2.6 Αξιοσημείωτοι Μετρικοί Χώροι στη Θεωρία Πιθανοτήτων

1.

$$X = C([0,1]) = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{R} \text{ συνεχής}\}$$
$$\|f\| = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$$

Ο X είναι διανυσματικός χώρος με norm $\| \ \|$ και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι Banach δηλαδή **πλήρης**.
Ως μετρικός χώρος με $d(f,g) = \|f - g\|$ είναι **πλήρης** και **διαχωρίσιμος**.Το τελευταίο μπορεί να διαπιστωθεί με την εξής συλλογιστική:
Δοθέντων μιας $f \in X$ και ενός $\epsilon > 0$ μπορούμε με το Θεώρημα Wierstrass να βρούμε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x), x \in [0,1]$ με $\|f - P\| < \frac{\epsilon}{2}$. Εύκολα τώρα πείθεται κάποιος ότι μπορούμε να βρούμε μια πολυωνυμική συνάρτηση $Q(x), x \in [0,1]$ με **ρητούς** συντελεστές εις τρόπον ώστε $\|Q - P\| < \frac{\epsilon}{2}$. Συνεπώς $\|f - Q\| < \epsilon$. Ώστε το σύνολο D των πολυωνυμικών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με ρητούς συντελεστές είναι **πυκνό** στο X, δηλαδή $\bar{D} = X$. Όμως το σύνολο D είναι αριθμήσιμο.
Ώστε ο χώρος $X = C([0,1])$ είναι **πλήρης, διαχωρίσιμος, μετρικός** χώρος και ως διανυσματικός χώρος με norm είναι Banach.

2.

$$X = C([0,\infty)) = \{f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R} \text{ συνεχής }\}$$

Για $f \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\|f\|_n = \sup_{0\leq t\leq n} |f(t)|$.
Η οικογένεια $\{\| \ \|_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια οικογένεια seminorm στον διανυσματικό χώρο X που είναι χώρος Frechet με μετρική:

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}$$

Ο χώρος X είναι **πλήρης** και **διαχωρίσιμος**.Το τελευταίο προκύπτει από το Θεώρημα Stone-Weierstrass αν παρατηρήσουμε ότι το σύνολο συναρτήσεων $S = \{1, e^{-x}\}$ διαχωρίζει σημεία και συνεπώς η παραγόμενη άλγεβρα

$$a(S) = \{\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx} : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

διαχωρίζει σημεία. Συνεπώς $\overline{a(S)} = X$ και άρα για τυχούσα $f \in X$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx} \quad , x \in [0,\infty)$ τέτοια ώστε $d(f,P) < \frac{\epsilon}{2}$.
Τώρα για έκαστο $a_k, k = 0, ..., n$ μπορούμε να βρούμε ρητό αριθμό a'_k με $|a_k - a'_k| < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$.Τότε με $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a'_k e^{-kx}$ θα έχουμε για κάθε

$x \geq 0$, $|P(x) - Q(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ και συνεπώς $\|P - Q\|_n < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Τελικά $d(f, Q) < \epsilon$ και άρα το σύνολο D των συναρτήσεων της μορφής $\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx}$ $, x \geq 0$ με ρητούς συντελεστές είναι πυκνό στο X, δηλαδή $\bar{D} = X$.Όμως το σύνολο D είναι **αριθμήσιμο**.

3.
$$X = C([0,1], \mathbb{R}^m) = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^m \text{ συνεχής } \}$$

4.
$$X = C([0,\infty), \mathbb{R}^m) = \{f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^m \text{συνεχής}\}$$

Όμοια όπως για τις περιπτώσεις 1. και 2. όπου όμως με $|\cdot|$ εννοείται η συνήθης Ευκλείδια norm του $\mathbb{R}^m$.

Θα παραθέσουμε τώρα ένα θεώρημα διατυπωμένο για το χώρο $X = C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ που εν τούτοις αφορά και τις άλλες περιπτώσεις με προφανή τρόπο.

Θεώρημα 2.6.1. *Για έκαστο $t \in [0,\infty)$ ορίζουμε $\pi_t : C([0,\infty), \mathbb{R}^m) \mapsto \mathbb{R}^m$ ως εξής $\pi_t(\omega) = \omega(t)$ (πρόκειται για την **t-προβολή** στο $\mathbb{R}^m$).*
Θέτουμε $\mathscr{C} = \{\pi_t^{-1}(B) : t \geq 0$ και $B \in \mathscr{B}^m\}$.Τότε για την σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}$ του τοπολογικού χώρου $X = C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ ισχύει:

$$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C}) \equiv \sigma(\pi_t, t \geq 0).$$

Απόδειξη. Δες [4] □

Άσκηση 20. Αν $\mathscr{A} = \{\{\omega \in X : (\pi_{t_1}(\omega), ..., \pi_{t_n}(\omega)) \in B\}$ με $n \in \mathbb{N}$, $\{t_1, ..., t_n\} \subset [0,\infty)$ και $B \in \mathscr{B}^m \otimes ... \otimes \mathscr{B}^m = \mathscr{B}^{mn}\}$ τότε $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα και $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A})$.

Τελευταίο αποτέλεσμα στα τοπολογικά μέτρα είναι ένα Θεώρημα αναπαράστασης κατά Riesz κατάλληλο για μετρικούς χώρους (όχι κατὰνάγκη τοπικά συμπαγείς).Το θεώρημα διατυπώνεται για πλήρως κανονικούς τοπ. χώρους (που περιλαμβάνουν τους μετρικούς).

Θεώρημα 2.6.2. *(Alexandroff)*
*Έστω $(X, \mathcal{T})$ πλήρως κανονικός τοπ. χώρος και $C_b(X)$ το σύνολο των συνεχών φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το συναρτησοειδές: $\Lambda : C_b(X) \mapsto \mathbb{R}$ είναι **γραμμικό,θετικό** (δηλ. $\Lambda(f) \geq 0$ όταν $f \geq 0$) και ικανοποιεί την παρακάτω απαίτηση:*

> *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε $f \in C_b(X)$ με $0 \leq f \leq 1$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in K_\epsilon$*
> *(ή αλλιώς: $\forall f \in C_b(X)$ με $0 \leq f \leq I_{K_\epsilon^c}$) να ισχύει : $|\Lambda(f)| \leq \epsilon$.*

*Τότε υπάρχει ένα και μοναδικό **κανονικό** μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ εις τρόπον ώστε επαληθεύεται η $\Lambda(f) = \int f d\mu$ για κάθε $f \in C_b(X)$.Ιδιαίτερα $\mu(X) = \Lambda(1)$.*

Απόδειξη. Δες [18] □

Πόρισμα 2.6.3. (Θεώρημα Riesz-Markov)
Έστω ότι ο τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff και **συμπαγής** και $\Lambda : C(X) \mapsto \mathbb{R}$ **γραμμικό, θετικό** συναρτησοειδές.
Τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$ εις τρόπον ώστε $\Lambda(f) = \int f d\mu$ για κάθε $f \in C(X)$.Μάλιστα $\mu(X) = \Lambda(1)$.

Απόδειξη. Ένας Hausdorff και συμπαγής τοπολογικός χώρος είναι normal και συνεπώς πλήρως κανονικός.Επιπλέον με $K_\epsilon = X$ ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος.

□

Η μοναδικότητα προκύπτει από το παρακάτω Λήμμα που παραθέτουμε με απόδειξη μιας και κρίνεται γενικότερης χρησιμότητας.

Λήμμα 2.6.4. *Έστω* ***πλήρως κανονικός*** *τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ και μ, ν* ***πεπερασμένα κανονικά*** *μέτρα στον $(X, \mathscr{B})$.*
Έστω $C_b(X)$ το σύνολο των συνεχών φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στον X.
Αν ισχύει $\int f d\mu = \int f d\nu$ για κάθε $f \in C_b(X)$ τότε ισχύει ότι $\mu = \nu$.

Απόδειξη. Έστω $K \in \mathscr{K}$ συμπαγές υποσύνονολο του X.Λόγω κανονικότητας των μέτρων θα είναι

$$\mu(K) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{T} \text{ με } U \supset K\}$$

και

$$\nu(K) = inf\{\nu(U) : U \in \mathcal{T} \text{ με } U \supset K\}$$

Από αυτό μπορούμε να εξασφαλίσουμε φθίνουσες ακολουθίες ανοικτών συνόλων $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ και $\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ εις τρόπον ώστε : $U_n \supset K, V_n \supset K$ και $\lim_n \mu(U_n) = \mu(K), \lim_n \nu(V_n) = \nu(K)$.
Αν τώρα θέσουμε $W_n = U_n \cap V_n \quad , n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία ανοικτών $W_n = U_n \cap V_n \quad , n \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και $W_n \supset K$. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n \in C_b(X)$ με $0 \leq f_n \leq 1$ και

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in K \\ 0 & \forall x \in X \setminus W_n \end{cases}$$

Από υπόθεση $\int f_n d\mu = \int f_n d\nu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Όμως

$$\int f_n d\mu = \mu(K) + \int I_{W_n \setminus K} f_n d\mu$$

$$\int f_n d\nu = \nu(K) + \int I_{W_n \setminus K} f_n d\nu$$

και συνεπώς

$$|\mu(K)-\nu(K)| \leq |\int I_{W_n\setminus K} f_n d\mu| + |\int I_{W_n\setminus K} f_n d\nu|$$

και επειδή αφενός $0 \leq f_n \leq 1$ και αφετέρου $W_n \subset U_n, V_n$
$|\mu(K)-\nu(K)| \leq \mu(U_n)-\mu(K)+\nu(V_n)-\nu(K) \quad, n \in \mathbb{N}$.
Από την κατασκευή των U_n, V_n συμπεραίνουμε ότι $\mu(K)=\nu(K) \ \ \forall K \in \mathscr{K}$. $\square$

2.7 Τοπολογία Χώρων Μέτρων

Έστω τοπολογικός χώρος Hausdorff $(X, \mathcal{T})$.

$$C_b(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{R} \text{ όπου } f \text{ συνεχής, φραγμένη } \}$$

και

$$\|f\| = sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$$

Ο χώρος $C_b(X)$ είναι διανυσματικός τοπολογικός χώρος με norm $\|\cdot\|$ και μάλιστα Banach. Ας είναι $C_b'(X)$ ο δυϊκός του , δηλαδή $C_b'(X) = \{L : C_b(X) \mapsto \mathbb{R}, L$ γραμμική, συνεχής$\}$. Όπως είναι γνωστό ο χώρος $C_b'(X)$ δέχεται δύο τοπολογίες: την **ισχυρή** με norm :

$$\|L\| = sup\{|L(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

και την **ασθενή** τ' με τοπική βάση περιοχών του $\Lambda \in C_b'(X)$ σύνολα της μορφής:

$$\bigcap_{i=1}^{k} V_\Lambda(f_i, \epsilon_i) \ , \ k \in \mathbb{N}$$

όπου

$$V_\Lambda(f,\epsilon) = \{L \in C_b'(X) : |L(f) - \Lambda(f)| < \epsilon\}$$

για $f \in C_b(X)$ και $\epsilon > 0$.
Μάλιστα είναι γνωστό (Θεώρημα Alaoglou-Bourbaki) ότι η μοναδιαία σφαίρα $B^* = \{L \in C_b'(X) : \|L\| \leq 1\}$ είναι **συμπαγές σύνολο στην ασθενή τοπολογία τ′.**
Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο

$$A^* = \{L \in C_b'(X) : L \text{ θετικό και } L(1) = 1\}$$

Επειδή για θετικά συναρτησοειδή L ισχύει $\|L\| = L(1)$ συμπεραίνουμε ότι $A^* \subset B^*$.
Εύκολα επαληθεύεται ότι το σύνολο A^* είναι κλειστό για την τοπολογία τ′ και συνεπώς το σύνολο A^* είναι επίσης συμπαγές για την ασθενή τοπολογία τ′.
Από την άλλη ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο $\mathcal{M}(X)$ των **κανονικών πεπερασμένων** μέτρων στον $(X, \mathscr{B})$, δηλαδή:

$$\mathcal{M}(X) = \{\mu : \mathscr{B} \mapsto [0,\infty) \text{ όπου } \mu \text{ κανονικό μέτρο με } \mu(X) < \infty\}$$

και εισάγουμε την **ασθενή τοπολογία** W με υποβάση περιοχών του μέτρου $\mu \in \mathcal{M}(X)$ τα σύνολα της μορφής:

$$W_\mu(f,\epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}(X) : |\int f d\nu - \int f d\mu| < \epsilon\} \tag{1}$$

όπου $f \in C_b(X)$ και $\epsilon > 0$.

Τα σύνολα της μορφής $\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_\mu(f_i, \epsilon_i)$ όπου $k \in \mathbb{N}, f_i \in C_b(X), \epsilon_i > 0$ και $\mu \in \mathcal{M}(X)$ αποτελούν τοπική βάση για την ασθενή τοπολογία W.

Θεώρημα 2.7.1. *Έστω **πλήρως κανονικός** τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$.Τότε ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}(X), W)$ είναι Hausdorff.*

Απόδειξη. Έστω $\mu_1 \neq \mu_2$ στον $\mathcal{M}(X)$.Από το Λήμμα 2.6.4. συνάγεται ότι υπάρχει $f \in C_b(X)$ τέτοια ώστε $\int f d\mu_1 \neq \int f d\mu_2$.
Θέτουμε $\epsilon = |\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2| > 0$. Θεωρούμε τις περιοχές $W_{\mu_1}(f, \frac{\epsilon}{2})$ και $W_{\mu_2}(f, \frac{\epsilon}{2})$ των μ_1, μ_2.
Με άτοπο απαγωγή επαληθεύεται ότι είναι ξένες.

□

Από τώρα και στο εξής θα ασχοληθούμε με το χώρο κανονικών μέτρων πιθανότητας $P(X)$, εφοδιασμένο με την ασθενή τοπολογία W και όπου X είναι πλήρως κανονικός ή και "καλύτερος".

$$P(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu(X) = 1\} \subset \mathcal{M}(X)$$

Η τοπολογία Hausdorff που επάγει ο $(\mathcal{M}(X), W)$ στον $P(X)$ θα αναφέρεται ως ασθενής τοπολογία του $P(X)$ και θα σημειώνεται με το ίδιο γράμμα W.Δύο πρώτα αποτελέσματα για τον τοπολογικό χώρο $(P(X), W)$ χρήσιμα για τη συνέχεια είναι τα ακόλουθα.

Πρόταση 2.7.2. *Έστω **πλήρως κανονικός** τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ $U \neq \emptyset$ ανοικτό του X και $a \in (0,1)$. Τότε το σύνολο $E = \{\mu \in P(X) : \mu(U) > a\} \subset P(X)$ είναι ανοικτό για την ασθενή τοπολογία W του $P(X)$.*

Απόδειξη. Έστω $\mu \in E$.Τότε $\mu(U) > a$ και για $\epsilon > 0$ αρκούντως μικρό είναι $\mu(U) > a + \epsilon$. Λόγω κανονικότητας του μέτρου μ υπάρχει συμπαγές $K \subset U$ με $\mu(K) > a + \epsilon$. Από το Λήμμα Urysohn (που ισχύει σε πλήρως κανονικούς χώρους) υπάρχει $f \in C_b(X)$ με $0 \leq f \leq 1$ και $f(x) = 1$ $\forall x \in K$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in U^c$ δηλαδή $I_K \leq f \leq I_U$. Θεωρούμε τώρα την περιοχή $W_\mu(f, \epsilon)$ όπου f, ϵ, μ τα παραπάνω.Τότε για τυχόν $\nu \in W_\mu(f, \epsilon)$ ισχύει $\int f d\nu \geq \int f d\mu - \epsilon$.Όμως $I_K \leq f \leq I_U$ και συνεπώς $\nu(U) \geq \int f d\nu$ αφενός και $\int f d\mu \geq \mu(K) > a + \epsilon$ αφετέρου.Τελικά $\nu(U) > a$ και άρα $W_\mu(f, \epsilon) \subset E$.

□

Πρόταση 2.7.3. *Έστω **συμπαγής** τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$.Τότε ο τοπ. χώρος $(P(X), W)$ είναι συμπαγής. Αν επιπλέον ο X είναι μετρικός τότε ο $(P(X), W)$ είναι **μετρικοποιήσιμος** (metrizable δηλαδή υπάρχει μετρική d που παράγει την τοπολογία W).*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : \mathcal{M}(X) \mapsto C_b'(X)$ την οριζόμενη ως εξής: $\Phi(\mu)(f) = \int f d\mu, \quad f \in C_b(X)$. Από το Λήμμα 2.6.4. η Φ είναι $1-1$ και από το θεώρημα Riesz-Markov ο περιορισμός της στο $P(X)$ είναι 'επί" του συνόλου $A^* = \{L \in C_b'(X) : L(1) = 1\}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι η Φ είναι ομοιομορφισμός των τοπ. χώρων $(P(X), W)$ και (A^*, τ') όπου τ′ είναι η ασθενής τοπολογία του $C_b'(X)$.Όμως όπως είδαμε το σύνολο A^* είναι τ′-συμπαγές (δες συζήτηση σελ. 43).Αν επιπλέον ο X είναι μετρικός τότε ο $C_b(X)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach (δες π.χ. [10]) οπότε ο $B^* = \{L \in C_b'(X) : \|L\| \leq 1\}$ εκτός από συμπαγής είναι και μετρικοποιήσιμος για την τ′. Το ίδιο και για τον τοπ. χώρο (A^*, τ'). □

Παρατήρηση 2.7.4. Ένας τοπ.χώρος **συμπαγής,μετρικοποιήσιμος** είναι **πολωνικός** (δηλαδή **μετρικός, πλήρης, διαχωρίσιμος** δες π.χ. [3] σελ. 349)

Προς την κατεύθυνση του τελευταίου αποτελέσματος το πιο σημαντικό είναι το ακόλουθο θεώρημα, η απόδειξη του οποίου βασίζεται στο παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 2.7.5. *Ένας τοπ. χώρος είναι πολωνικός όταν και μόνο όταν είναι ομοιόμορφος προς ένα G_δ σύνολο ενός μετρικού συμπαγούς τοπ. χώρου.*

Απόδειξη. Δες [15] σελ. 92-93 □

Θεώρημα 2.7.6. *Έστω X **πολωνικός** χώρος. Τότε ο τοπ. χώρος $(P(X), W)$ είναι πολωνικός.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα υπάρχει ένας **μετρικός, συμπαγής** τοπ. χώρος $(Y, \mathcal{T})$ και ακολουθία υποσυνόλων $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ εις τρόπον ώστε $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Μάλιστα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $U_n \supset U_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $P_X = \{\mu \in P(Y) : \mu(Y \setminus X) = 0\} \subset P(Y)$.
Θεωρούμε τον $P(Y)$ εφοδιασμένο με την ασθενή τοπολογία την οποία θα σημειώνουμε W_Y και το σύνολο $P_X \subset P(Y)$ εφοδιασμένο με την τοπολογία W_X που επάγει (σε υποσύνολο) ο τοπ. χώρος $(P(Y), W_Y)$. Εύκολα επαληθεύεται ότι οι τοπολογικοί χώροι $(P(X), W)$ και (P_X, W_X) είναι ομοιόμορφοι (δοκιμάστε με την $\Phi : P_X \mapsto P(X) : \Phi(\mu) = \mu|\mathscr{B}_X$ όπου $\mathscr{B}_X$ είναι η σ-άλγεβρα Borel του X). Σύμφωνα με το παραπάνω Λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο P_X είναι ένα G_δ σύνολο του συμπαγούς μετρικού χώρου $(P(Y), W_Y)$ (δες την προηγούμενη Πρόταση).
Πράγματι για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathbf{M}_n = \{\mu \in P(Y) : \mu(U_n) > 1 - \frac{1}{n}\}$. Τότε $\mathbf{M}_n$ είναι **ανοικτό** στον $(P(Y), W_Y)$ (δες Πρόταση 2.7.2.)
και $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}_n = \{\mu \in P(Y) : \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \geq 1\} = \{\mu \in P(Y) : \mu(X) = 1\}$.
Ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}_n = P_X$.

□

Παρατήρηση 2.7.7. Υπάρχει και άλλος,διαφορετικός τρόπος προσέγγισης του παραπάνω θεωρήματος.

Έστω $(X,\mathcal{T})$ μετρικός χώρος με $\mathcal{T}$ παραγόμενη από την μετρική d. Για τυχόν $A \subset X$ και $\epsilon > 0$ γράφουμε:

$$A^{\epsilon} = \{y \in X : \exists x \in A \text{ με } d(x,y) < \epsilon\}$$

Για οποιαδήποτε μέτρα μ,ν στο $P(X)$ ορίζουμε:

$$\rho(\mu,\nu) = inf\{\epsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^{\epsilon}) + \epsilon \text{ για όλα τα } A \in \mathscr{B}\}$$

Τότε αποδεικνύεται ότι η ρ ορίζει μια μετρική στον $P(X)$ και οτι η προκύπτουσα τοπολογία συμπίπτει με την W. Η μετρική αυτή είναι γνωστή ως **μετρική** Prohorov.

Για μια τέτοια ανάπτυξη δες [10]

2.8 Ασθενής Σύγκλιση Ακολουθιών Μέτρων Πιθανότητας

Ορισμός 2.8.1. *Έστω **πλήρως κανονικός** τοπ. χώρος $(X,\mathcal{T})$ και δίκτυο (ακολουθία) μέτρων $\{\mu_a, a \in I\} \subset P(X)$.Λέγεται ότι το δίκτυο (ακολουθία) $\{\mu_a\}$ συγκλίνει **ασθενώς** στο μέτρο πιθανότητας $\mu \in P(X)$ όταν και μόνο όταν συγκλίνει για την ασθενή τοπολογία W του $P(X)$, δηλαδή όταν και και μόνο όταν για κάθε $f \in C_b(X)$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a_0 \in I$ τέτοιο ώστε : $a > a_0 \Rightarrow \mu_a \in W_{\mu}(f,\epsilon)$. Η ασθενής σύγκλιση σημειώνεται με $\mu_a \xrightarrow{W} \mu$ και από τον ορισμό της τοπολογίας W προκύπτει άμεσα ότι*

$$\mu_a \xrightarrow{W} \mu \Leftrightarrow \lim_a \int f d\mu_a = \int f d\mu \text{ για κάθε } f \in C_b(X).$$

Άλλες ισοδύναμες διατυπώσεις περιέχονται στο παρακάτω:

Θεώρημα 2.8.2. *(Portmanteau)*
Έστω τοπ. χώρος $(X,\mathcal{T})$ πλήρως κανονικός, δίκτυο $\{\mu_a, a \in I\} \subset P(X)$ και $\mu \in P(X)$. Οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:

i. $\mu_a \xrightarrow{W} \mu$

ii. $\lim_a sup \mu_a(F) \leq \mu(F)$ *για κάθε **κλειστό** $F \subset X$.*

iii. $\lim_a inf \mu_a(E) \geq \mu(E)$ *για κάθε **ανοικτό** $E \subset X$.*

iv. $\lim_a \mu_a(A) = \mu(A)$ *για κάθε $A \in \mathscr{B}$ με $\mu(\vartheta A) = 0$*
Αν επιπλέον ο X είναι μετρικός οι παραπάνω διατυπώσεις ισοδυναμούν και με την

v. $\lim_a \int f d\mu_a = \int f d\mu$ *για κάθε $f \in U_b(X)$ - το σύνολο των **ομοιόμορφα** συνεχών και φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων.*

Απόδειξη. Δες [16] , [4] □

Κλείνουμε την αναφορά μας στους χώρους μέτρων πιθανότητας με ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά στον χαρακτηρισμό της συμπάγειας υποσυνόλων του $P(X)$.Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [16] σελ. 49.

Θεώρημα 2.8.3. *(Prohorov)*
Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ ***πλήρως κανονικός*** *και $H \subset P(X)$.*
Υποθέτουμε ότι ισχύει η (uniform tightness):

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ***συμπαγές*** *$K_\epsilon \subset X$ εις τρόπον ώστε*

$$\sup\{\mu(X \setminus K_\epsilon) : \mu \in H\} \leq \epsilon \qquad \circledast .$$

Τότε το σύνολο $\bar{H}$ είναι ***συμπαγές*** *στον τοπ. χώρο $(P(X), W)$. Αν επιπλέον ο τοπ. χώρος X είναι μετρικός πλήρης τότε ισχύει και το αντίστροφο:*

Αν το $\bar{H}$ είναι συμπαγές τότε επαληθεύεται η $\circledast$.

Άσκηση 21. Έστω X πλήρως κανονικός και δίκτυο $\{\mu_a, a \in I\} \subset P(X)$ και $\mu \in P(X)$. Έστω $\mathscr{E}$ βάση της τοπολογίας του X που είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Αν $\lim\limits_a \mu_a(U) = \mu(U)$ για κάθε $U \in \mathscr{E}$ τότε $\mu_a \xrightarrow{W} \mu$.

Άσκηση 22. Έστω X πλήρως κανονικός και $\mu \in P(X)$.Δείξτε ότι το σύνολο $\mathscr{A}_\mu = \{A \in \mathscr{B} : \mu(\vartheta A) = 0\}$ είναι άλγεβρα και περιέχει μια βάση της τοπολογίας του X.

Άσκηση 23. Έστω $(X, \mathcal{T})$ πλήρως κανονικός και δίκτυο $\{x_a, a \in I\} \subset X$. Δείξτε ότι $x_a \to x \Leftrightarrow \delta_{x_a} \xrightarrow{W} \delta_x$. ($\delta_y$ το μέτρο Dirac στο y).Αν $\Delta(X) = \{\delta_y : y \in X\}$ δείξτε ότι οι τοπ. χώροι $(X, \mathcal{T})$ και $(\Delta(X), W)$ είναι ομοιόμορφοι.

2.9 Μέτρο γινόμενο κανονικών μέτρων

Ας είναι $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπ. χώροι Hausdorff. Η **τοπολογία γινόμενο** $\mathcal{T}_{X\times Y}$ του $X \times Y$ είναι η τοπολογία με βάση $\{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$. Αν $\mathscr{E}_X$ (αντιστοιχα $\mathscr{E}_Y$) είναι βάση της $\mathcal{T}_X$ (αντίστοιχα $\mathcal{T}_Y$) τότε η κλάση

$$\mathscr{E}_X \circ \mathscr{E}_Y \equiv \{U \times V : U \in \mathscr{E}_X, V \in \mathscr{E}_Y\}$$

είναι επίσης βάση της τοπολογίας γινόμενο $\mathcal{T}_{X\times Y}$.
Γενικά αν $\mathscr{E}$ είναι κλάση υποσυνόλων του X και $\mathscr{H}$ του Y

$$\mathscr{E} \circ \mathscr{H} \equiv \{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{H}\}$$

Η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του $X \times Y$ η παραγόμενη από τα ανοικτά της τοπολογίας $\mathcal{T}_{X\times Y}$ θα σημειώνεται $\mathscr{B}(X \times Y)$. Εξάλλου αν $\mathscr{B}(X)$ (αντίστοιχα

$\mathscr{B}(Y)$) είναι η σ-άλγεβρα Borel του X (αντίστοιχα του Y) τότε η σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$ του $X\times Y$ είναι εξορισμού η $\sigma(\{A\times B : A\in\mathscr{B}(X), B\in\mathscr{B}(Y)\}$ (δες σελ. 15) Προφανώς $\mathscr{E}_X\circ\mathscr{E}_Y\subset\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$. Οι απεικονίσεις $\pi_1 : X\times Y\to X$ και $\pi_2 : X\times Y\to Y$ οι οριζόμενες ως $\pi_1(x,y)=x$ και $\pi_2(x,y)=y$ αντίστοιχα ονομάζονται **προβολές** και είναι **'επί'**, **συνεχείς** και **ανοικτές** για τις τοπολογίες $\mathcal{T}_{X\times Y},\mathcal{T}_X$ και $\mathcal{T}_{X\times Y},\mathcal{T}_Y$ αντίστοιχα. Άρα είναι $\mathscr{B}(X\times Y)-\mathscr{B}(X)$ και $\mathscr{B}(X\times Y)-\mathscr{B}(Y)$ μετρήσιμες αντίστοιχα.

Πρόταση 2.9.1. *Είναι πάντα $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)\subset\mathscr{B}(X\times Y)$. Ιδιαίτερα αν οι τοπολογίες έχουν αριθμήσιμη βάση ισχύει ισότητα.*

Απόδειξη. Εύκολα επαληθεύεται ότι $A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)=\pi_1^{-1}(A)\cap\pi_2^{-1}(B)$. Όμως οι π_1,π_2 είναι $\mathscr{B}(X\times Y)$ μετρήσιμες και συνεπώς όταν $A\in\mathscr{B}(X), B\in\mathscr{B}(Y)$ τότε $\pi_1^{-1}(A),\pi_2^{-1}(B)\in\mathscr{B}(X\times Y)$. Αν $\mathscr{E}_X,\mathscr{E}_Y$ είναι αριθμήσιμες βάσεις των $\mathcal{T}(X),\mathcal{T}(Y)$ αντίστοιχα τότε η βάση $\mathscr{E}_X\circ\mathscr{E}_Y$ της $\mathcal{T}(X\times Y)$ είναι αριθμήσιμη. Συνεπώς κάθε ανοικτό $E\in\mathcal{T}(X\times Y)$ γράφεται σαν **αριθμήσιμη** ένωση στοιχείων της $\mathscr{E}_X\circ\mathscr{E}_Y\subset\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$. Ώστε $\mathcal{T}(X\times Y)\subset\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$. $\square$

Έστω τώρα **κανονικά μέτρα** μ και ν στους $(X,\mathscr{B}(X))$ και $(Y,\mathscr{B}(Y))$ αντίστοιχα. Το μέτρο γινόμενο $\mu\otimes\nu$ είναι ορισμένο (μόνο) στην $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)$ και **δεν** μπορεί να είναι κανονικό. Το πρόβλημα λοιπόν είναι η κατασκευή ενός κανονικού μέτρου φ στην $\mathscr{B}(X\times Y)$ εις τρόπον ώστε $\phi(A\times B)=\phi(A)\cdot\phi(B)$ για όλα τα $A\in\mathscr{B}(X)$ και $B\in\mathscr{B}(Y)$. Το ζήτημα αντιμετωπίζεται στο παρακάτω Θεώρημα. Η απόδειξη πολλών βημάτων θα παρατεθεί μάλλον λιτά. Προηγουμένως ένας συμβολισμός: Αν $\mathscr{L}$ είναι η κλάση υποσυνόλων ενός συνόλου με το σύμβολο $\mathscr{L}_\sigma$ θα γράφουμε την κλάση που απαρτίζεται από **αριθμήσιμες** ενώσεις υποσυνόλων που ανήκουν στην $\mathscr{L}$. Για **πεπερασμένες** ενώσεις η αντίστοιχη κλάση θα γράφεται $\mathscr{L}_s$.

Θεώρημα 2.9.2. *(Κανονικού μέτρου γινόμενο)*
*Έστω τοπ. χώροι $(X,\mathcal{T}_X)$ και $(Y,\mathcal{T}_Y)$ και **κανονικά** μέτρα μ και ν ορισμένα στους $(X,\mathscr{B}(X))$ και $(Y,\mathscr{B}(Y))$ αντίστοιχα. Τα μ, ν θεωρούνται **σ-πεπερασμένα**. Τότε υπάρχει ένα και μόνο κανονικό μέτρο φ στον $(X\times Y,\mathscr{B}(X\times Y))$ εις τρόπον ώστε $\phi(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B)$ για όλα τα $A\in\mathscr{B}(X)$ και $B\in(Y)$.*

Απόδειξη. Έστω ρ το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{B}(X)\circ\mathscr{B}(Y),\mu\otimes\nu)$. Προφανώς είναι $\rho|\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(Y)=\mu\otimes\nu$.

1. $\rho(A)=inf\{\rho(W) : W\in(\mathcal{T}_X\circ\mathcal{T}_Y)_\sigma$ με $W\supset A\}$, $\;A\subset X\times Y$.
   Για $\rho(A)=\infty$ προφανές.
   Για $\rho(A)<+\infty$ και τυχόν $\epsilon,\theta>0 : 2\theta+\theta^2<\epsilon$ υπάρχει $\{A_n\times B_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{B}(X)\circ\mathscr{B}(Y)$ με $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n)\supset A$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\cdot\nu(B_n)<\rho(A)+\theta\quad(1)$
   Λόγω κανονικότητας των μέτρων μ,ν υπάρχουν ανοικτά $\{U_n,n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{T}_X$ και $\{V_n,n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{T}_Y$ με $U_n\supset A_n,\ V_n\supset B_n$ και

$$\mu(U_n) < \mu(A_n) + \frac{\theta}{2^{n+1}(\nu(B_n)+1)} \tag{2}$$

$$\nu(V_n) < \nu(B_n) + \frac{\theta}{2^{n+1}(\mu(A_n)+1)} \tag{3}$$

Θέτουμε $W = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(U_n \times V_n)$. Τότε $W \in (\mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y)_\sigma$ και $W \supset A$.

Από σ-υποπροσθετικότητα του ρ και (1), (2), (3) έχουμε $\rho(W) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(U_n \times V_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \cdot \nu(V_n) < \sum\limits_{n} \mu(A_n)\nu(B_n) + 2\theta + \theta^2 < \rho(A) + \epsilon$. Άρα και το ζητούμενο.

2. $\rho(K) < +\infty$ για κάθε $K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ και για όλα τα $A \times B \in \mathscr{B}(X) \circ \mathscr{B}(Y)$ ισχύει : $\rho(A \times B) = \sup\{\rho(K) : K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ με $K \subset A \times B\}$.
Πράγματι για τυχόν $K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ ισχύει $K \subset \pi_1(K) \times \pi_2(K)$ και π_1, π_2 συνεχείς. Επίσης λόγω κανονικότητας των μέτρων μ, ν για τυχόν $\epsilon, \theta > 0$ με $2\theta + \theta^2 < \epsilon$ υπάρχουν $\Lambda \in \mathscr{K}_X, N \in \mathscr{K}_Y$ με $\Lambda \subset A, N \subset B$ και

$$\mu(A) < \mu(\Lambda) + \frac{\theta}{\nu(B)+1}$$
$$\nu(B) < \nu(N) + \frac{\theta}{\mu(A)+1}$$

οπότε: $\mu(A) \cdot \nu(B) < \mu(\Lambda)\nu(N) + 2\theta + \theta^2$
άρα $\rho(A \times B) < \rho(\Lambda \times N) + \epsilon$
Άρα $\rho(A \times B) = sup\{\rho(\Lambda \times N) : \Lambda \times N \in \mathscr{K}_X \circ \mathscr{K}_Y$ με $\Lambda \times N \subset A \times B\}$.
Όμως $\mathscr{K}_X \circ \mathscr{K}_Y \subset \mathscr{K}(X \times Y)$ (γιατί;) και συνεπώς

$$\rho(A \times B) \leq sup\{\rho(K) : K \in \mathscr{K}(X \times Y) \text{ με } K \subset A \times B\}$$

Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι το δεύτερο μέλος της ανισότητας είναι $\leq \rho(A \times B)$.

3. Ορίζουμε $\tau : \mathscr{K}(X \times Y) \mapsto [0, +\infty)$ ως εξής:

$$\tau(K) = \rho(K)$$

Η τ είναι **μονότονη,απλά υποπροσθετική,απλά προσθετική**.
Θα περιοριστούμε να δείξουμε το τελευταίο. Ας είναι $C_1, C_2 \in \mathscr{K}(X \times Y)$ με $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.Επειδή ο τοπ. χώρος $X \times Y$ είναι Hausdorff υπάρχουν ανοικτά $P, Q \in \mathcal{T}(X \times Y)$ με $P \supset C_1, Q \supset C_2$ και $P \cap Q = \emptyset$. Επειδή η $\{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}(X \times Y)$ θα είναι $P = \bigcup\limits_{i \in I}(U_i \times V_i)$ με U_i, V_i ανοικτά και αφού C_1 συμπαγές $\subset P$ θα είναι

$C_1 \subset \bigcup\limits_{i\in a}(U_i \times V_i) \equiv W$ όπου a πεπερασμένο $\subset I$.
Ώστε $C_1 \subset W \subset P, C_2 \subset Q$ και $P \cap Q = \emptyset$.
Ακόμα το $W \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ είναι δηλαδή μετρήσιμο για το εξωτερικό μέτρο ρ και συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned}\rho(C_1 \cup C_2) &= \rho((C_1 \cup C_2) \cap W) + \rho((C_1 \cup C_2) \cap W^c) \\ &= \rho(C_1) + \rho(C_2) \\ &= \tau(C_1) + \tau(C_2)\end{aligned}$$

Όμως $C_1 \cup C_2 \in \mathscr{K}(X \times Y)$.

4. Για κάθε $K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $W_\epsilon \in \mathcal{T}(X \times Y)$ εις τρόπον ώστε $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ για κάθε $C \in \mathscr{K}(X \times Y)$ με $K \subset C \subset W_\epsilon$.
Πράγματι από το (1) υπάρχει $W_\epsilon \in (\mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y)_\sigma \subset \mathcal{T}(X \times Y)$ με $W_\epsilon \supset K$ και $\rho(W_\epsilon) < \rho(K) + \epsilon$.
Λόγω της μονοτονίας της ρ είναι $\rho(C) \leq \rho(W_\epsilon$ όταν $C \subset W_\epsilon$.

5. Έστω φ το μοναδικό κανονικό μέτρο το ορισμένο στον $(X \times Y, \mathscr{B}(X \times Y))$ εις τρόπον ώστε $\phi(K) = \tau(K)$ για κάθε $K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ (δες. Θεώρημα 2.4.2.)
Τότε $\phi(A) \leq \rho(A)$ για κάθε $A \in \mathscr{B}(X \times Y)$.
Πράγματι για τυχόν $W \in \mathcal{T}(X \times Y)$ είναι $\phi(W) = sup\{\phi(K) : K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ με $K \subset W\}$. Όμως $\phi(K) = \rho(K) \leq \rho(W)$ για κάθε $K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ με $K \subset W$. Άρα $\phi(W) \leq \rho(W)$ για κάθε $W \in \mathcal{T}(X \times Y)$. Όμοια για τυχόν $E \in \mathscr{B}(X \times Y)$ και λόγω της (1):

$$\begin{aligned}\phi(E) &= inf\{\phi(W) : W \in \mathcal{T}(X \times Y), W \supset E\} \\ &\leq inf\{\phi(W) : W \in (\mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y)_\sigma, W \supset E\} \\ &\leq inf\{\rho(W) : W \in (\mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y)_\sigma, W \supset E\} \\ &= \rho(E)\end{aligned}$$

6. $\phi(E) = \rho(E)$ για κάθε $E \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$.
Για $E = A \times B \in \mathscr{B}(X) \circ \mathscr{B}(Y)$ και $\rho(A \times B) < \infty$ είναι λόγω του (5) και $\phi(A \times B) < \infty$ και συνεπώς λόγω κανονικότητας του ϕ θα έχουμε:

$$\phi(A \times B) = \sup\{\phi(K) : K \in \mathscr{K}(X \times Y), K \subset A \times B\}$$

Από $\phi(K) = \rho(K) \;\; \forall K \in \mathscr{K}(X \times Y)$ και (2) έχουμε

$$\phi(E) = \rho(E) \text{ για κάθε } E \in \mathscr{B}(X) \circ \mathscr{B}(Y).$$

Για τυχόν $E = A \times B \in \mathscr{B}(X) \circ \mathscr{B}(Y)$ και λόγω του σ-πεπερασμένου των μέτρων μ,ν θα είναι: $A = \bigcup\limits_n A_n, B = \bigcup\limits_n B_n$ με $A_n \in \mathscr{B}(X), B_n \in \mathscr{B}(Y)$ και $\mu(A_n) < +\infty, \nu(B_n) < +\infty$.
Χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε τα A_n ξένα και B_n ξένα

(αλλιώς παίρνουμε τα $A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \subset A_n$ κ.λ.π.) οπότε $A \times B = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (A_i \times B_j)$ με $A_i \times B_j$ ξένα μεταξύ τους και $\rho(A_i \times B_j) < +\infty$. Όμως ρ είναι σ-προσθετική στην $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ και $\rho(A_i \times B_j) = \phi(A_i \times B_j)$.
Άρα $\phi(E) = \rho(E)$ για κάθε $E \in \mathscr{B}(X) \circ \mathscr{B}(Y)$ που είναι **ημιάλγεβρα** και **κλειστή** στην πεπερασμένη τομή. Όμως τα φ,ρ είναι σ-πεπερασμένα άρα συμπίπτουν στην $\sigma(\mathscr{B}(X) \circ \mathscr{B}(Y)) = \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$.

7. Το μέτρο φ είναι το μόνο **κανονικό** μέτρο στον $(X \times Y, \mathscr{B}(X \times Y))$ τέτοιο ώστε $\phi(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ για όλα τα $A \in \mathscr{B}(X), B \in \mathscr{B}(Y)$.
Πράγματι αν $\tilde{\phi}$ είναι επίσης τέτοιο μέτρο τότε θα είναι σ-πεπερασμένο (δες την απόδειξη του 6) και θα είναι $\phi = \tilde{\phi}$ σε όλη την $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$. Άρα $\phi(E) = \tilde{\phi}(E)$ για κάθε $E \in (\mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y)_s$.
Έστω τώρα τυχόν $W \in \mathcal{T}(X \times Y)$. Επειδή η $\mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}(X \times Y)$ θα είναι $W = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ με $W_\lambda \in \mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y$ οπότε (δες Πρόταση 2.2.6.) $\phi(W) = \sup\{\phi(\bigcup_{\lambda \in i} W_\lambda) : i$ πεπερασμένο $\subset \Lambda\}$.
Όμοια $\tilde{\phi}(W) = \sup\{\tilde{\phi}(\bigcup_{\lambda \in i} W_\lambda) : i$ πεπερασμένο $\subset \Lambda\}$.
Όμως $\bigcup_{\lambda \in i} W_\lambda \in (\mathcal{T}_X \circ \mathcal{T}_Y)_s$ και εκεί τα $\phi, \tilde{\phi}$ συμπίπτουν.

□

Κλείνουμε την αναφορά μας στα κανονικά μέτρα γινόμενα με το παρακάτω για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε σε αυτήν αναλόγων αποτελεσμάτων π.χ. του [3] ή του [12].

Θεώρημα 2.9.3. *Υπό τις προϋποθέσεις και συμβολισμούς του προηγούμενου Θεωρήματος:*

i. *Αν $E \in \mathcal{T}(X \times Y)$ και $E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$ τότε η συνάρτηση $\nu(E_x), x \in X$ είναι κάτω ημισυνεχής. Όμοια για την $\mu(E^y), y \in Y$ με $E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$*

ii. *Αν $E \in \mathscr{B}(X \times Y)$ τότε οι συναρτήσεις $\nu(E_x), x \in X$ και $\mu(E^y), y \in Y$ είναι μετρήσιμες.*

iii. *Αν $E \in \mathscr{B}(X \times Y)$ τότε $\phi(E) = \int_X \nu(E_x)\mu(dx) = \int_Y \mu(E^y)\mu(dy)$.*

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια στην ασθενή σύγκλιση ακολουθιών μέτρων γινόμενο.

Ας είναι $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ πλήρως κανονικοί τοπ. χώροι.Τότε είναι γνωστό ότι ο χώρος $X \times Y$ με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}(X \times Y)$ είναι πλήρως κανονικός. Έστω δίκτυα μέτρων πιθανότητας $\{\mu_a, a \in I\} \subset P(X)$ και $\{\nu_a, a \in I\} \subset P(Y)$. Έστω ϕ_a το κανονικό μέτρο γινόμενο των μ_a, ν_a όπως εξασφαλίστηκε στα προηγούμενα.Τότε το δίκτυο $\{\phi_a, a \in I\} \subset P(X \times Y)$ και ισχύει το:

Θεώρημα 2.9.4. *Αν $\mu_a \xrightarrow{W} \mu \in P(X)$ και $\nu_a \xrightarrow{W} \nu \in P(Y)$ τότε $\phi_a \xrightarrow{W} \phi \in P(X \times Y)$ όπου ϕ είναι το κανονικό μέτρο γινόμενο των μ, ν.*

Απόδειξη. Δες [16] ή [15] □

2.10 Συμπληρώματα

Συμπλήρωμα 1

Έστω τοπ. χώρος Hausdorff $(X, \mathcal{T})$. Κατά τον [16] και άλλους ονομάζεται **μέτρο Radon** στον X ένα μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

i. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x με $\mu(U) < +\infty$.

ii. $\mu(A) = sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές $\subset A\}$ για κάθε $A \in \mathscr{B}$.

Αν μ είναι μέτρο Radon τότε από την $(i.)$ συνάγεται άμεσα ότι $\mu(K) < +\infty$ για κάθε $K \in \mathscr{K}$.Ακόμα περισσότερο αν $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ με $U_n \in \mathcal{T}$ και $\mu(U_n) < +\infty, n \in \mathbb{N}$ τότε το μέτρο Radon μ είναι κανονικό. Ιδιαίτερα αυτό ισχύει όταν $\mu(X) < +\infty$ (δες Πρόταση 2.2.4. σελ. 23). Αντίστροφα ένα σ-πεπερασμένο κανονικό μέτρο είναι μέτρο Radon (δες Πρόταση 2.2.3. και Άσκηση 19 σελ. 37)
Το παρακάτω είναι ένα Θεώρημα κατασκευής μέτρου Radon όπως συναντάται στους Bourbaki,[18] .

Θεώρημα 2.10.1. *Έστω τοπ. χώρος Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ και συνολοσυνάρτηση $\tau : \mathscr{K} \mapsto [0, \infty)$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:*

1. *Αν $K, L \in \mathscr{K}$ με $K \subset L$ τότε $\tau(K) \leq \tau(L)$ (μονοτονία)*

2. *$\tau(K \cup L) \leq \tau(K) + \tau(L)$ για όλα τα $K, L \in \mathscr{K}$*

3. *$\tau(K \cup L) = \tau(K) + \tau(L)$ για όλα τα $K, L \in \mathscr{K}$ με $K \cap L = \emptyset$*

4. *Για οποιαδήποτε $\{K_a, a \in I\} \subset \mathscr{K}$ τέτοια ώστε : $a, b \in I \Rightarrow$ υπάρχει $\gamma \in I$ με $K_a \cap K_b \supset K_\gamma$ ισχύει $\tau(\bigcap\limits_{a \in I} K_a) = \inf\limits_{a \in I} \tau(K_a)$*

Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο Radon μ στον $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε $\mu(K) = \tau(K)$ για κάθε $K \in \mathscr{K}$.

Άσκηση 24. Δείξτε ότι η συνθήκη $(iv.)$ του Θεωρήματος 2.4.2. συνεπάγεται τη συνθήκη (4) του προηγούμενου Θεωρήματος.

Υπόδειξη: $K = \bigcap\limits_a K_a$. Για $\epsilon > 0$ υπάρχει U_ϵ ανοικτό $\supset K$ με $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ για κάθε $C \in \mathscr{K}$ με $K \subset C \subset U_\epsilon$.
Αφού $U^c \cap K = \emptyset$ οπότε $\bigcap\limits_a (U^c \cap K_a) = \emptyset$ θα υπάρχει πεπερασμένο $E \subset I$ με $\bigcap\limits_{a \in E} (U^c \cap K_a) = \emptyset$. Έστω τώρα $b \in I$ με $K_b \subset \bigcap\limits_{a \in E} K_a$.Τότε $U^c \bigcap K_b \subset \bigcap\limits_{a \in E} (U^c \cap K_a)$ και άρα $K_b \subset U$ οπότε $\tau(K_b) < \tau(K) + \epsilon$

Συμπλήρωμα 2

Υπάρχει ευρύτερη έννοια ασθενούς τοπολογίας και ασθενούς σύγκλισης κατάλληλη για τοπ. χώρους που είναι (μόνο) Hausdorff και έχει ως ακολούθως:

Οι βασικές περιοχές του $\mu \in \mathcal{M}(X)$ είναι τα σύνολα:

$$W_\mu(f,\epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}(X) : \int f d\nu \geq \int f d\mu - \epsilon\}$$

όπου $\epsilon > 0$ και $f \in \mathscr{L}_b(X)$ το σύνολο των κάτω- ημισυνεχών φραγμένων πραγματικών συναρ΄τησεων. Αν W είναι η παραγόμενη τοπολογία τότε $\mu_a \xrightarrow{W} \mu$ όταν και μόνο όταν $liminf \int f d\mu_a \geq \int f d\mu$ για κάθε $f \in \mathscr{L}_b(X)$.

Για περεταίρω ανάπτυξη δες [15]

Κεφάλαιο 3

Προβολικά συστήματα μέτρων Μέτρα σε καρτεσιανά γινόμενα απείρων παραγόντων

3.1 Τοπολογικά προβολικά συστήματα μέτρων

Ένα **τοπολογικό προβολικό σύστημα μέτρων** αποτελείται από τα παρακάτω:

α'. I ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια μερική διάταξη $\preceq$ και την επιπλέον ιδιότητα:
Για οποιαδήποτε $i, j \in I$ υπάρχει $\ell \in I$ με $i, j \preceq \ell$.

β'. τοπολογικοί χώροι Hausdorff $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ και **πεπερασμένα** μέτρα μ_i στον $(X_i, \mathscr{B}_i)$ όπου $\mathscr{B}_i = \sigma(\mathcal{T}_i)$ η σ-άλγεβρα Borel του $X_i, i \in I$.

γ'. για οποιαδήποτε $i \preceq j$ απεικονίσεις $P_{ij} : X_j \mapsto X_i$ **συνεχείς** για τις τοπολογίες που ικανοποιούν τις:

i. $P_{ii} : X_i \mapsto X_i$ η ταυτοτική για $i \in I$.
ii. $P_{i\ell} = P_{ij} \circ P_{j,\ell}$ για $i \preceq j \preceq \ell$ στο I
iii. $\mu_j(P_{ij}^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ για $i \preceq j$ και $B \in \mathscr{B}_i$

Εν συντομία θα γράφουμε $(X_i, \mu_i, P_{ij}), i \in I$.

Παράδειγμα 3.1.1.

- ν μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$.
- $I = \{i \subset \mathbb{N} : i$ πεπερασμένο$\}$ διατεταγμένο με την $\subset$.
- $X_i = \mathbb{R}^{|i|}, i \in I$ με τη συνήθη τοπολογία
- $\mu_i = \bigotimes_{1}^{|i|} \nu, i \in I$ στον $(\mathbb{R}^{|i|}, \mathscr{B}^{|i|})$
- $P_{ij} = \pi_{ij} : \mathbb{R}^{|j|} \mapsto \mathbb{R}^{|i|}$ η συνήθης προβολή.

3.2 Θεώρημα Prohorov

Το πρόβλημα είναι η κατασκευή μέτρων στο $\mathbb{R}^\infty$ "προσδιοριζόμενα" από (να έχουν περιθώριες) τα μέτρα $\mu_i, i \in I$.Το πρόβλημα είναι βέβαια μη-τετριμμένο όταν το I είναι **μη-πεπερασμένο**.Το θεμελιώδες αποτέλεσμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 3.2.1. *(Prohorov)*
Έστω τοπολογικό προβολικό σύστημα μέτρων $(X_i, \mu_i, P_{ij}), i \in I$ με $\mu_i(X_i) < +\infty$ για κάθε $i \in I$.Έστω τοπ. χώρος Hausdorff X και ***συνεχείς*** *απεικονίσεις $P_i : X \mapsto X_i$ εις τρόπον ώστε:*

$$P_i = P_{ij} \circ P_j \text{ για όλα τα } i \preceq j \text{ στο } I$$

Υποθέτουμε ότι τα μέτρα $\mu_i, i \in I$ είναι κανονικά και ότι η οικογένεια $\{P_i, i \in I\}$ είναι ***διαχωρίζουσα*** *τα σημεία του X, δηλαδή: για $x \neq y$ στο X υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $P_i(x) \neq P_i(y)$.*
Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. *Υπάρχει κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$ εις τρόπον ώστε*

   $$\mu(K) = inf\{\mu_i(P_i(K)) : i \in I\} \text{ για κάθε } K \in \mathscr{K}_X$$

   και

   $$\mu(P_i^{-1}(B)) \leq \mu_i(B) \text{ για κάθε } i \in I \text{ και κάθε } B \in \mathscr{B}_i$$

2. *Η συνθήκη (Prohorov): για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ τέτοιο ώστε $\mu_i(X_i \setminus P_i(K_\epsilon)) < \epsilon$ για κάθε $i \in I$ είναι αναγκαία και ικανή ώστε για το μέτρο μ να ισχύει $\mu(P_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ για κάθε $i \in I$ και $B \in \mathscr{B}_i$. Υπό τη συνθήκη αυτή το μέτρο μ είναι το μοναδικό κανονικό για το οποίο ισχύει η τελευταία ισότητα (και είναι προφανές ότι $\mu(X) = \mu_i(X_i)$ για κάθε $i \in I$).*

Απόδειξη. Δες παράρτημα Γ!

□

Εφαρμογές

I. T μη πεπερασμένο και $\{S_t, t \in T\}$ τοπ. χώροι Hausdorff.Θέτουμε $I = \{i \subset T : i$ πεπερασμένο$\}$ και θεωρούμε τους τοπ. χώρους γινόμενο $X = \prod_{t\in T} S_t = \{x : T \mapsto \bigcup_{t\in T} X_t$ με $x(t) \in S_t \;\; \forall t \in T\}$ και για έκαστο $i \in I, X_i = \prod_{t\in i} S_t$.
Για κάθε $i \in I, \pi_i : X \mapsto X_i$ είναι η i-προβολή, δηλαδή $\pi_i(x) = x|i$. Κάθε απεικόνιση π_i είναι ‘έπί”. Ιδιαίτερα για $i = \{t\}$ θα γράφουμε $\pi_t = \pi_{\{t\}}, t \in T$. Αν $\mathcal{T}_t$ είναι η τοπολογία του $S_t, t \in T$ τότε η τοπολογία του X ορίζεται ως αυτή με βάση:

$$\{\bigcap_{t\in i} \pi_t^{-1}(U_t) : i \in I, U_t \in \mathcal{T}_t \text{ για } t \in i\}$$

Επίσης για έκαστο $i \in I$ η τοπολογία του $X_i = \prod_{t\in i} S_t$ έχει βάση $\{\prod_{t\in i} U_t : U_t \in \mathcal{T}_t$ για $t \in i\}$. Να σημειωθεί ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο βασικά (ή και υποβασικά) ανοικτά των τοπολογιών $\mathcal{T}_t, t \in T$. Αν τώρα για $i \subset j$ στο I $\;\pi_{ij} : X_j \mapsto X_i$ είναι η συνήθης προβολή $\pi_{ij}(y) = y|i$ τότε για τις παραπάνω τοπολογίες του X και των X_i οι απεικονίσεις $\pi_i, i \in I$ και $\pi_{ij}, i \subset j$ είναι **συνεχείς, ανοικτές**. Ιδιαίτερα η $\{\pi_i, i \in I\}$ είναι **διαχωρίζουσα** του X.
Οι τοπ. χώροι X_i, X εφοδιάζονται με τις αντίστοιχες σ-άλγεβρες Borel $\mathscr{B}_i$ και $\mathscr{B}, i \in I$. Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\bigotimes_{t\in i} \mathscr{B}(S_t) \subset \mathscr{B}_i, i \in I$$

και

$$\bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(S_t) \subset \mathscr{B}$$

όπου γενικά $\bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}(S_t) \equiv \sigma(\pi_t, t \in \Lambda) = \sigma(\{\pi_t^{-1}(B) : t \in \Lambda, B \in \mathscr{B}(S_t)\})$

Θεώρημα 3.2.2. *(Kakutani)*
Υποθέτουμε ότι οι τοπ. χώροι $\{S_t, t \in T\}$ είναι ***συμπαγείς*** *και ότι* ***πεπερασμένα, κανονικά*** *μέτρα μ_i ορίζονται στους $(X_i, \mathscr{B}_i), i \in I$ εις τρόπον ώστε να ισχύει:*

$$\mu_i(B) = \mu_j(\pi_{ij}^{-1}(B)) \text{ για όλα τα } i \subset j \text{ στο } I \text{ και } B \in \mathscr{B}_i.$$

Τότε υπάρχει ένα μόνο κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε: $\mu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ για κάθε $i \in I$ και $B \in \mathscr{B}_i$.
Ιδιαίτερα $\mu(X) = \mu_i(X_i)$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Το $(X_i, \mu_i, \pi_{ij}), i \in I$ είναι προφανώς ένα τοπολογικό προβολικό σύστημα μέτρων. Επιπλέον ο τοπ. χώρος X είναι συμπαγής και επαληθεύεται η συνθήκη Prohorov .
Πράγματι για $\epsilon > 0$ επιλέγουμε συμπαγές $K_\epsilon = X$ και έχουμε $\mu_i(X_i \setminus \pi_i(K_\epsilon)) = \mu_i(X_i \setminus X_i) = 0 < \epsilon$ για όλα τα $i \in I$. (Θυμηθείτε ότι η π_i είναι ‘έπί”). $\square$

II. Έστω $\{S_k, k \in \mathbb{N}\}$ τοπ. χώροι Hausdorff και θεωρούμε τους τοπ. χώρους γινόμενο (επίσης Hausdorff)

$$X_i = \prod_{k=1}^{i} S_k, \quad i = 1, 2, ...$$
$$X = \prod_{k=1}^{\infty} S_k$$

Οι απεικονίσεις:

$$\pi_{i,i+1} : X_{i+1} \mapsto X_i$$

και

$$\pi_i : X \mapsto X_i, \quad i \in \mathbb{N}$$

είναι οι συνήθεις προβολές που ως γνωστόν είναι **συνεχείς, ανοικτές** (και ``έπί'') για τις τοπολογίες γινόμενο.
Υποθέτουμε τώρα ότι **πεπερασμένα** μέτρα μ_i ορίζονται στους $(X_i, \mathscr{B}_i), i \in I$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιείται η:

$$\mu_i(B) = \mu_{i+1}(\pi_{i,i+1}^{-1}(B)) \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{B}_i.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι τότε θα ισχύει και η:

$$\mu_i(B) = \mu_j(\pi_{i,j}^{-1}(B)) \text{για όλα τα } i \leq j, B \in \mathscr{B}_i$$

όπου $\pi_{i,j} : X_j \mapsto X_i$ είναι η συνήθης προβολή.
Έτσι προσδιορίζεται ένα τοπολογικό προβολικό σύστημα μέτρων $(X_i, \mu_i, \pi_{i,j}), i \in \mathbb{N}$ και εύκολα διαπιστώνεται ότι η οικογένεια $\{\pi_i, i \in \mathbb{N}\}$ είναι **διαχωρίζουσα** το X.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $\{S_k, k \in \mathbb{N}\}$ τοπ. χώροι Hausdorff και* ***πεπερασμένα κανονικά*** *μέτρα μ_i ορίζονται στους $(X_i, \mathscr{B}_i), i \in \mathbb{N}$ όπου $X_i = \prod_{k=1}^{i} S_k$. Υποθέτουμε ότι για τα μέτρα $\mu_i, i \in I$ ισχύει η παρακάτω συνθήκη:*

$$\mu_i(B) = \mu_{i+1}(\pi_{i,i+1}^{-1}(B)) \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{B}_i \qquad (\alpha)$$

Τότε υπάρχει ένα και μόνο ***κανονικό*** *μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$ όπου $X = \prod_{k=1}^{\infty} S_k$ που επαληθεύει την:*

$$\mu_(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B) \text{ για όλα τα } i \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{B}_i$$

Για το μέτρο μ ισχύει: $\mu(X) = \mu_i(X_i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη Prohorov.
Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$ και ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία συμπαγών $L_i \subset X_i, i \in \mathbb{N}$ ως ακολούθως. Λόγω κανονικότητας του μ_1 εξασφαλίζεται συμπαγές $L_1 \subset X_1$ με:

$$\mu(X_1 \setminus L_1) < \frac{\epsilon}{2^2} \tag{1}$$

Όμοια λόγω κανονικότητας του μ_2 βρίσκουμε συμπαγές $L_2 \subset \pi_{1,2}^{-1}(L_1)$ που ικανοποιεί την:

$$\mu_2(\pi_{1,2}^{-1}(L_1) \setminus L_2) < \frac{\epsilon}{2^3}$$

και ούτω καθεξής ώστε να βρούμε συμαπγές $L_{n+1} \subset \pi_{n,n+1}^{-1}(L_n)$ που ικανοποιεί την:

$$\mu_{n+1}(\pi_{n,n+1}^{-1}(L_n) \setminus L_{n+1}) < \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$$

Τώρα για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1}(X_{n+1} \setminus L_{n+1}) &= \mu_{n+1}(X_{n+1} \setminus \pi_{n,n+1}^{-1}(L_n)) \\
&\quad + \mu_{n+1}(\pi_{n,n+1}^{-1}(L_n) \setminus L_{n+1}) \\
&\leq \mu_{n+1}(X_{n+1} \setminus \pi_{n,n+1}^{-1}(L_n)) + \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \\
&= \mu_{n+1}(\pi_{n,n+1}^{-1}(X_n \setminus L_n)) + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

και συνεπώς λόγω της (1) για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\mu_{n+1}(X_{n+1} \setminus L_{n+1}) \leq \mu_n(X_n \setminus L_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \tag{2}$$

Γράφοντας την ανισότητα (1) και (2) για τους δείκτες
$n = 1, 2, ..., i-1$ και αθροίζοντας έχουμε:

$$\mu_i(X_i \setminus L_i) < \epsilon \text{ για όλα τα } i \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Θέτουμε $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_n^{-1}(L_n)$. Ορίζοντας την απεικόνιση $\Phi : K \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} L_n$ με τον παρακάτω τρόπο

$$(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1, (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), ...)$$

διαπιστώνουμε ότι το K είναι ομοιόμορφο προς το $\Phi(K)$ το οποίο είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\prod_{n=1}^{\infty} L_n$ και συνεπώς το K είναι συμπαγές $\subset X$. Τώρα αφενός $\pi_i(K) = \bigcap_{j \geq i} \pi_{i,j}(L_j), i \in \mathbb{N}$ και αφετέρου
$\pi_{i,j}(L_j) \supset \pi_{i,\ell}(L_\ell)$ για $i \leq j \leq \ell$
οπότε

$$\mu_i(X_i \setminus \pi_i(K)) = \lim_j \mu_i(X_i \setminus \pi_{i,j}(L_j)) \tag{4}$$

Όμως λόγω της (α)

$$\begin{aligned}\mu_i(X_i \setminus \pi_{i,j}(L_j)) &= \mu[\pi_{i,j}^{-1}(X_i \setminus \pi_{i,j}(L_j))] \\ &= \mu_j[X_j \setminus \pi_{i,j}^{-1}(\pi_{i,j}(L_j)] \\ &\leq \mu_j(X_j \setminus L_j)\end{aligned}$$

και συνεπώς από (3), (4) έχουμε

$$\mu_i(X_i \setminus \pi_i(K)) \leq \epsilon \text{ για όλα τα } i \in \mathbb{N}$$

□

Παράδειγμα 3.2.4. $\{S_k, k \in \mathbb{N}\}$ τοπ. χώροι Hausdorff και **κανονικά** μέτρα **πιθανότητας** ν_k ορισμένα στους $(S_k, \mathscr{B}'_k), k \in \mathbb{N}$ όπου $\mathscr{B}'_k$ οι αντίστοιχες σ-άλγεβρες Borel .

Όπως παραπάνω $X_i = \prod_{k=1}^{i} S_k, i \in \mathbb{N}$ και $X = \prod_{k=1}^{\infty} S_k$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.9.2. σε κάθε μετρήσιμο χώρο $(X_i, \mathscr{B}_i)$ υπάρχει ένα μοναδικό κανονικό μέτρο πιθανότητας μ_i που ικανοποιεί την απαίτηση:

$$\mu_i(A_1 \times ... \times A_i) = \nu_1(A_1)...\nu_i(A_i)$$

για οποιαδήποτε $A_1 \in \mathscr{B}'_1, ..., A_i \in \mathscr{B}'_i$.
Εύκολα τώρα επαληθεύεται ότι

$$\mu_{i+1}(\pi_{i,i+1}^{-1}(B)) = \mu_i(B) \text{ για όλα τα } i \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{B}_i \tag{5}$$

Συνεπώς υπάρχει ένα και μόνο κανονικό μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}_X)$ που ικανοποιεί την

$$\mu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B) \text{ για όλα τα } i \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{B}_i$$

Άσκηση 25. Δείξτε την σχέση (5) παραπάνω.

Υπόδειξη: Αν $B = A_1 \times ... \times A_i$ με $A_1 \in \mathscr{B}'_1, ..., A_i \in \mathscr{B}'_i$ τότε:

$$\begin{aligned}\mu_{i+1}(\pi_{i,i+1}^{-1}(B)) &= \mu_{i+1}(A_1 \times ... \times A_i \times S_{i+1}) \\ &= \nu_1(A_1)...\nu_i(A_i) \\ &= \mu_i(B)\end{aligned}$$

Συμπεράνατε ότι η (5) ισχύει για κάθε $B \in \mathscr{B}'_1 \otimes ... \otimes \mathscr{B}'_i$. Εν συνεχεία χρησιμοποείστε την άσκηση 14 σελίδα 36.

3.3 Θεώρημα Kolmogorov

Τι μέτρο και σε ποια σ-άλγεβρα υποσυνόλων ενός καρτεσιανού γινομένου απείρων παραγόντων μπορούμε να έχουμε χωρίς τη συνθήκη Prohorov ; Η απάντηση είναι το Θεώρημα Kolmogorov. Προηγουμένως όμως ένα Λήμμα γενικού ενδιαφέροντος:

Λήμμα 3.3.1. *Έστω D μη πεπερασμένο με μερική διάταξη $\leq$ και την επι πλέον ιδιότητα: Αν $\{d_k, k \in \mathbb{N}\} \subset D$ τότε υπάρχει $d \in D$ με $d_k \leq d$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\mathscr{A}_d, d \in D$ σ-άλγεβρες υποσυνόλων του X και μέτρα μ_d ορισμένα στις $\mathscr{A}_d, d \in D$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιούνται οι:*

1. *Αν $d \leq e$ στο D τότε $\mathscr{A}_d \subset \mathscr{A}_e$.*

2. *Αν $d \leq e$ στο D τότε $\mu_e|\mathscr{A}_d = \mu_d$*

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

i. *η κλάση $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{d \in D} \mathscr{A}_d$ είναι σ-άλγεβρα*

ii. *υπάρχει μοναδικό μέτρο μ στην $\mathscr{A}$ εις τρόπον ώστε να είναι $\mu|\mathscr{A}_d = \mu_d$ για κάθε $d \in D$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή. Θα περιοριστούμε σε αυτήν του $(ii.)$
Ορίζουμε $\mu(A) = \mu_d(A)$ αν $A \in \mathscr{A}_d$. Η μ είναι καλά ορισμένη διότι αν είναι και $A \in \mathscr{A}_e$ για κάποιο $e \in D$ τότε υπάρχει $g \in D$ με $d, e \leq g$ και $A \in \mathscr{A}_g$ οπότε $\mu_d(A) = \mu_e(A) = \mu_g(A)$ λόγω της (2). Προφανώς $\mu(\emptyset) = 0$ και η μ είναι σ-προσθετική διότι αν $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}$ τότε $A_n \in \mathscr{A}_{d_n}, n \in \mathbb{N}$.
Κατά τις υποθέσεις για το D υπάρχει $d \in D$ με $d_n \leq d$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και σύμφωνα με την (1) θα είναι $\mathscr{A}_{d_n} \subset \mathscr{A}_d$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}_d$. Αν τώρα τα $A_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα θα έχουμε $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu_d(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_d(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

□

Θεώρημα 3.3.2. *(Kolmogorov-Bochner)*
T υπεραριθμήσιμο και $S_t, t \in T$ είναι τοπολογικοί χώροι Hausdorff. Έστω $I = \{i \subset T : i$ πεπερασμένο$\}$ και θέτουμε:

$$X_i = \prod_{t \in i} S_t, \quad i \in I \quad X = \prod_{t \in T} S_t$$

εφοδιασμένα με την τοπολογία γινόμενο.
*Υποθέτουμε ότι **κανονικά** μέτρα πιθανότητας μ_i ορίζονται στους $(X_i, \mathscr{B}_i), i \in I$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιείται η:*

$$\mu_j(\pi_{ij}^{-1}(B)) = \mu_i(B) \ \text{ για όλα τα } \ i \subset j, B \in \mathscr{B}_i$$

όπου για $i \subset j$ η απεικόνιση $\pi_{ij} : X_j \mapsto X_i$ είναι η συνήθης προβολή και $\mathscr{B}_i$ οι σ-άλγεβρες Borel του X_i. Αν $\pi_i : X \mapsto X_i, i \in I$ οι συνήθεις προβολές και $\mathscr{H} = \sigma(\pi_i, i \in I) = \sigma(\{\pi_i^{-1}(B) : i \in I, B \in \mathscr{B}_i\})$, υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{H})$ εις τρόπον ώστε να ισχύει για κάθε $i \in I$

$$\mu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B) \ \ \forall B \in \mathscr{B}_i$$

Απόδειξη. Για $d \subset T$ θέτουμε $X_d = \prod\limits_{t \in d} S_t$ και για οποιαδήποτε $d, e \subset T$ οι απεικονίσεις $\pi_d : X \mapsto X_d$ και $\pi_{de} : X_e \mapsto X_d$ με $d \subset e$ είναι οι συνήθεις προβολές που είναι συνεχείς, επί.

Θέτουμε $\quad I = \{i \subset T : i \text{ πεπερασμένο}\}$
$D = \{d \subset T : d \text{ αριθμήσιμο}\}$
$I_d = \{i \subset d : i \text{ πεπερασμένο}\} \quad , d \in D.$

Για κάθε $d \in D$ έχουμε ένα τοπολογικό προβολικό σύστημα μέτρων $(X_a, \mu_a, \pi_{ab}), a \in I_d$ για το οποίο ισχύει το θεώρημα της εφαρμογής II του θεωρήματος Prohorov και συνεπώς υπάρχει ένα μόνο **κανονικό** μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mu}_d$ στον $(X_d, \mathscr{B}_d)$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιείται η:

$$\tilde{\mu}_d(\pi_{ad}^{-1}(B)) = \mu_a(B) \ \ \forall a \in I_d, \ \forall B \in \mathscr{B}_a \tag{1}$$

Για τα μέτρα $\tilde{\mu}_d, d \in D$ ισχύει:

$$\tilde{\mu}_e(\pi_{de}^{-1}(B)) = \tilde{\mu}_d(B) \ \ \text{για όλα τα } d \subset e \ \text{ στο } D, \ \forall B \in \mathscr{B}_d \tag{2}$$

Η επαλήθευση της (2) θα είναι το τελευταίο τμήμα της απόδειξης.
Αν τεθεί $\mathscr{A}_d = \{\pi_d^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}_d\}$ τότε η κλάση $\mathscr{A}_d$ είναι σ-άλγεβρα για κάθε $d \in D$ και μάλιστα για $d \subset e$ στο D ισχύει

$$\mathscr{A}_d \subset \mathscr{A}_e \tag{3}$$

Πράγματι αν $E \in \mathscr{A}_d$ τότε $E = \pi_d^{-1}(B)$ με $B \in \mathscr{B}_d$. Όμως $\pi_d = \pi_{de} \circ \pi_e$ και άρα $E = \pi_e^{-1}(\pi_{de}^{-1}(B)) = \pi_e^{-1}(\Delta)$ με $\Delta = \pi_{de}^{-1}(B) \in \mathscr{B}_e$.
Σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_d$ ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση μ_d

$$\mu_d(\pi_d^{-1}(B)) = \tilde{\mu}_d(B), B \in \mathscr{B}_d$$

Θα δείξουμε ότι η συνολοσυνάρτηση μ_d ορίζει μέτρο πιθανότητας.
Πράγματι αν $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}_d$ τότε $A_n = \pi_d^{-1}(B_n), B_n \in \mathscr{B}_d$ και $\mu_d(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu_d(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \pi_d^{-1}(B_n)) = \mu_d(\pi_d^{-1}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)) = \tilde{\mu}_d(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$.
Αν τα $A_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα τότε τα $B_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα αφού $A_n \cap A_m = \pi_d^{-1}(B_n \cap B_m) = \emptyset \Rightarrow B_n \cap B_m = \emptyset$ (η π_d είναι 'επί'').

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς} \quad & \tilde{\mu}_d(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}_d(B_n) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(\pi_d^{-1}(B_n)) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(A_n) \end{aligned}$$

Επίσης $\mu_d(X) = \mu_d(\pi_d^{-1}(X_d)) = \tilde{\mu}_d(X_d) = 1$ Για τα μέτρα μ_d στις σ-άλγεβρες $\mathscr{A}_d$ ισχύει:

$$\mu_e|\mathscr{A}_d = \mu_d \text{ όταν } d \subset e \text{ στο } D \tag{4}$$

Πράγματι $\quad \mu_e(\pi_d^{-1}(B)) = \mu_e((\pi_{de} \circ \pi_e)^{-1}(B)) =$
$= \mu_e(\pi_e^{-1}(\pi_{de}^{-1}(B))) = \tilde{\mu}_e(\pi_{de}^{-1}(B)) = \tilde{\mu}_d(B)$

και επικαλούμενοι την (2) έχουμε $\mu_e(\pi_d^{-1}(B)) = \mu_d(\pi_d^{-1}(B))$.
Ώστε για τα $D, \mathscr{A}_d, \mu_d$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Λήμματος και άρα ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας μ στην $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{d \in D} \mathscr{A}_d$ για το οποίο ισχύει $\mu|\mathscr{A}_d = \mu_d$.
Τώρα για τυχόν $i \in I$ και $B \in \mathscr{B}_i$ θεωρούμε τυχόν $d \in D$ με $i \subset d$ και έχουμε:

$$\pi_i^{-1}(B) = (\pi_{id} \circ \pi_d)^{-1}(B) = \pi_d^{-1}(\pi_{id}^{-1}(B))$$

και συνεπώς $\mathscr{H} \subset \mathscr{A}$.
Ακόμα

$$\mu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_d(\pi_d^{-1}(\pi_{id}^{-1}(B))) = \tilde{\mu}_d(\pi_{id}^{-1}(B))$$

και λόγω της (1)

$$\mu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$$

Το μ είναι το μοναδικό μέτρο στον $(X, \mathscr{H})$ που ικανοποιεί την τελευταία ισότητα διότι αν ν είναι άλλο μέτρο πιθανότητας με $\nu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ για κάθε $i \in I$ και $B \in \mathscr{B}_i$ τότε τα μέτρα πιθανότητας μ,ν συμπίπτουν στην άλγεβρα $\{\pi_i^{-1}(B) : i \in I, B \in \mathscr{B}_i\}$ και άρα συμπίπτουν στην παραγόμενη σ-άλγεβρα $\mathscr{H}$.
Μένει να επαληθεύσουμε την (2). Πράγματι για τυχόν $i \in I$ με $i \subset d \subset e$ έχουμε:

$$\tilde{\mu}_e(\pi_{ie}^{-1}(A)) = \mu_i(A) \quad \text{και} \quad \tilde{\mu}_d(\pi_{id}^{-1}(A)) = \mu_i(A), \quad A \in \mathscr{B}_i$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\pi_{ie} = \pi_{id} \circ \pi_{de}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\mu_e(\pi_{de}^{-1}(\pi_{id}^{-1}(A))) = \mu_d(\pi_{id}^{-1}(A)), \quad A \in \mathscr{B}_i$$

και συνεπώς $\quad \mu_e(\pi_{de}^{-1}(E)) = \mu_d(E), \quad E \in \mathscr{D}$ όπου $\mathscr{D}$ η άλγεβρα

$$\bigcup_{i \subset d, i \in I} \{\pi_{id}^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}_i\} \subset \mathscr{B}_d.$$

Έτσι αν $\nu(E) = \mu_e(\pi_{de}^{-1}(E)), E \in \mathscr{B}_d$ τότε σύμφωνα με την Άσκηση 9 σελ. 24 η ν ορίζει κανονικό μέτρο πιθανότητας στον $(X_d, \mathscr{B}_d)$ για το οποίο ισχύει:

$$\nu(E) = \mu_d(E) \quad \text{για κάθε} \;\; E \in \mathscr{D}$$

Όμως η άλγεβρα $\mathscr{D}$ περιέχει μια βάση $\mathscr{E}$ της τοπολογίας του X_d και συνεπώς περιέχει και την $\mathscr{E}_s$. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε την Άσκηση 14 σελ. 36

□

Παρατήρηση 3.3.3. Παρακολουθώντας την απόδειξη διαπιστώνουμε ότι το μέτρο μ κατασκευάστηκε στην σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$ αλλά η μοναδικότητα του αποδείχτηκε μονάχα στην $\mathscr{H} \subset \mathscr{A}$. Σε ζητήματα σ-αλγεβρών σε καρτεσιανά γινόμενα αναφέρονται οι επόμενες γραμμές.

Ορισμός 3.3.4. *Έστω $\Lambda \neq \emptyset$ και μετρήσιμοι χώροι $(S_\lambda, \mathscr{R}_\lambda), \lambda \in \Lambda$. Έστω $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ και $\pi_\lambda \equiv \pi_{\{\lambda\}} : X \mapsto S_\lambda, \lambda \in \Lambda$ οι συνήθεις προβολές. Ονομάζεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** του $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ και γράφεται $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{R}_\lambda$ η παραγόμενη από τις απεικονίσεις $\{\pi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$. Είναι δηλαδή:*

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{R}_\lambda = \sigma(\pi_\lambda, \lambda \in \Lambda) = \sigma(\{\pi_\lambda^{-1}(A) : \lambda \in \Lambda, A \in \mathscr{R}_\lambda)$$

Το επόμενο λήμμα είναι γενικότερης σημασίας αλλά οπωσδήποτε απαραίτητο για ζητήματα που αφορούν τις σ-άλγεβρες γινόμενο.

Λήμμα 3.3.5. *Έστω $X \neq \emptyset, (Y, \mathscr{B})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \mapsto Y$. Θέτουμε $\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$. Τότε:*

i. η $\mathscr{A}_f$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

ii. αν $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E})$ τότε $\mathscr{A}_f = \sigma(\{f^{-1}(E) : E \in \mathscr{E}\})$

Απόδειξη.

i. Άμεση επαλήθευση

ii. Έστω $\mathscr{Z} = \sigma(\{f^{-1}(E) : E \in \mathscr{E}\})$ και θέτουμε $\mathscr{D} = \{B \in \mathscr{B} : f^{-1}(B) \in \mathscr{Z}\}$. Επαληθεύεται άμεσα ότι η $\mathscr{D}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Y που περιλαμβάνει την $\mathscr{E}$ και άρα $\mathscr{D} \supset \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{B}$. Ώστε για κάθε $B \in \mathscr{B}$ είναι $f^{-1}(B) \in \mathscr{Z}$ και άρα $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{Z}$. Από το προφανές $\{f^{-1}(E) : E \in \mathscr{E}\} \subset \mathscr{A}_f$ συνάγεται ότι $\mathscr{Z} \subset \mathscr{A}_f$.

$\square$

Άσκηση 26. Έστω $\{S_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ τοπ. χώροι Hausdorff και $\mathscr{B}(S_\lambda), \lambda \in \Lambda$ οι αντίστοιχες σ-άλγεβρες Borel υποσυνόλοων τους. Έστω $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο και $\mathscr{B}_X$ η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του X.Τότε:

i. $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) \subset \mathscr{B}_X$

ii. Αν οι τοπ. χώροι έχουν αριθμήσιμη βάση και το σύνολο Λ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο τότε $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) = \mathscr{B}_X$

Υπόδειξη:

1. Άμεσο διότι η συνέχεια-μετρησιμότητα των προβολών $\{\pi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ συνεπάγεται $\{\pi_\lambda^{-1}(A) : \lambda \in \Lambda, A \in \mathscr{B}(S_\lambda)\} \subset \mathscr{B}_X$.

2.
   - Για Λ πεπερασμένο δες Πρόταση 2.9.1.
   - Για Λ αριθμήσιμο: Αν $\mathcal{E}_\lambda$ είναι αριθμήσιμη βάση του S_λ τότε η κλάση $\mathscr{E} = \{\bigcap_{\lambda\in i} \pi_\lambda^{-1}(V_\lambda) : i$ πεπερασμένο $\subset \Lambda$ και $V_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda$ για $\lambda \in i\}$ είναι **αριθμήσιμη** βάση της τοπολογίας γινόμενο του X. Όμως $\mathscr{E} \subset \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$ και συνεπώς $\mathcal{T}_X \subset \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$.

Άσκηση 27. T υπεραριθμήσιμο και $S_t, t \in T$ είναι τοπ. χώροι Hausdorff . Έστω $I = \{i \subset T : i$ πεπερασμένο$\}$ και $D = \{d \subset T : d$ αριθήσιμο$\}$. Έστω $X_i = \prod_{t \in i} S_t, i \in I$ και $X_d = \prod_{t \in d} S_t, d \in D$ και $X = \prod_{t \in T} S_t$. Ακόμα $\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_d$ και $\mathscr{B}_X$ είναι αντίστοιχα οι σ-άλγεβρες Borel των X_i, X_d, X για τις τοπολογίες γινόμενο. Έστω τώρα $\mathscr{H} = \sigma(\{\pi_i^{-1}(B) : i \in I, B \in \mathscr{B}_i\})$ και $\mathscr{A} = \bigcup_{d \in D} \mathscr{A}_d$ με $\mathscr{A}_d = \{\pi_d^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}_d\}$. Τότε ισχύουν:

1. $\mathscr{A}_d$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα.
2. $\bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}(S_t) \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{B}_X$
3. Αν οι τοπ. χώροι έχουν αριθμήσιμη βάση τότε $\bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}(S_t) = \mathscr{H} = \mathscr{A}$.

Υπόδειξη:

1. Δες την απόδειξη του θεωρήματος Kolmogorov-Bochner και το Λήμμα 3.3.1.
2. Ο πρώτος εγκλεισμός είναι προφανής.
   Η απόδειξη του δεύτερου είναι στην απόδειξη του Θεωρήματος K-B.
   Ο τρίτος συνάγεται από τη συνέχεια-μετρησιμότητα των προβολών $\pi_d, d \in D$
3. Καταρχήν και σύμφωνα με την άσκηση 26 είναι $\mathscr{B}_d = \bigotimes_{t \in d} \mathscr{B}(S_t) = \sigma(\pi_{td} : t \in d)$ όπου $\pi_{td} : X_d \mapsto S_t, t \in d$ οι συνήθεις προβολές. Αν τώρα θέσουμε $\mathscr{L}_d = \{\pi_{td}^{-1}(A) : t \in d, A \in \mathscr{B}(S_t)\}$ τότε $\mathscr{B}_d = \sigma(\mathscr{L}_d)$ και κατά το παραπάνω Λήμμα θα είναι $\mathscr{A}_d = \sigma(\{\pi_d^{-1}(B) : B \in \mathscr{L}_d\})$.Άρα

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_d &= \sigma(\{\pi_d^{-1}(\pi_{td}^{-1}(A)) : t \in d, A \in \mathscr{B}(S_t)\}) \\
&= \sigma(\{(\pi_{td} \circ \pi_d)^{-1} : t \in d, A \in \mathscr{B}(S_t)\}) \\
&= \sigma(\{\pi_t^{-1}(A) : t \in d, A \in \mathscr{B}(S_t)\}) \\
&\subset \sigma(\{\pi_t^{-1}(A) : t \in T, A \in \mathscr{B}(S_t)\}) \\
&= \bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}(S_t)
\end{aligned}$$

   και συνεπώς

$$\mathscr{A} \subset \bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}(S_t)$$

   Χρησιμοποιήθηκε η προφανής $\pi_t = \pi_{td} \circ \pi_d, t \in d$. Είναι η ίδια που για τυχόν $t \in T, B \in \mathscr{B}(S_t)$ εξασφαλίζει ότι για $d \in D$ με $d \supset \{t\}$ έχουμε $\pi_t^{-1}(B) = (\pi_{td} \circ \pi_d)^{-1}(B) = \pi_d^{-1}(\Delta)$ με $\Delta = \pi_{td}^{-1}(B) \in \mathscr{B}_d = \bigotimes_{t \in d} \mathscr{B}(S_t)$ και συνεπώς $\{\pi_t^{-1}(B) : t \in T, B \in \mathscr{B}(S_t)\} \subset \mathscr{A}_d \subset \mathscr{A}$.

Πόρισμα 3.3.6. (Θεώρημα Kolmogorov)
T υπεραριθμήσιμο και $S_t, t \in T$ **πολωνικοί** τοπ. χώροι. Έστω $I = \{i \subset T : i$ πεπερασμένο$\}$ και $X_i = \prod_{t \in i} S_t, i \in I$ και $X = \prod_{t \in T} S_t$. Έστω ότι τα μέτρα πιθανότητας μ_i ορίζονται στους $(X_i, \mathscr{B}_i), i \in I$ εις τρόπον ώστε να ισχύει:

$$\mu_j(\pi_{ij}^{-1}(B)) = \mu_i(B) \quad \text{για όλα τα} \quad i \subset j, B \in \mathscr{B}_i.$$

Τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S_t))$ που ικανοποιεί την απαίτηση:

$$\mu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B) \quad \forall i \in I, B \in \mathscr{B}_i$$

Απόδειξη. Αφού οι τοπ. χώροι $S_t, t \in T$ είναι πολωνικοί, οι τοπ. χώροι $X_i, i \in I$ είναι επίσης πολωνικοί και συνεπώς τα μέτρα πιθανότητας μ_i είναι κανονικά. Εξάλλου κατά την Άσκηση 27 ισχύει: $\bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S_t) = \sigma(\pi_i, i \in I)$. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε το θεώρημα Kolmogorov-Bochner. □

3.4 Τα προβλήματα της σ-άλγεβρας $\bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S_t)$ όταν T υπεραριθμήσιμο

Πρόταση 3.4.1. *T υπεραριθμήσιμο (π.χ διάστημα του $\mathbb{R}$) και $\{S_t, t \in T\}$ πολωνικοί τοπολογικοί χώροι. Ένα υποσύνολο $E \subset X = \prod_{t\in T} S_t$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $\bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S_t)$ όταν και μόνο όταν υπάρχει **αριθμήσιμο** $d \subset T$ και $B \in \bigotimes_{t\in d}\mathscr{B}(S_t)$ εις τρόπον ώστε $I_E(x) = I_B(\pi_d(x))$ για κάθε $x \in X$ ($\pi_d : X \mapsto \prod_{t\in d} S_t$ η συνήθης προβολή). Μάλιστα είναι δυνατόν το d να επιλεγεί ώστε να περιέχει άλλο επιθυμητό αριθμήσιμο $e \subset T$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Άσκηση 27 $\bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S_t) = \mathscr{A} = \bigcup_{d\in D}\mathscr{A}_d$ όπου $D = \{d \subset T : d$ αριθμήσιμο$\}$ και $\mathscr{A}_d = \{\pi_d^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}_d\}$. Συνεπώς αν $E \in \bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S_t)$ τότε υπάρχει $d_1 \in D$ με $E \in \mathscr{A}_{d_1}$. Θέτω $d = d_1 \cup e$ και επειδή $\mathscr{A}_{d_1} \subset \mathscr{A}_d$ (δες απόδειξη του θεωρήματος K-B) θα είναι $E \in \mathscr{A}_d$ δηλαδή $E = \pi_d^{-1}(B)$ όπου $B \in \mathscr{B}_d (= \bigotimes_{t\in d}\mathscr{B}(S_t)$, δες Άσκηση 26). Τώρα επαληθεύεται άμεσα ότι $I_B(\pi_d(x)) = I_E(x)$ για κάθε $x \in X$.Το αντίστροφο είναι προφανές αφού η I_E είναι $\bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S_t)$-μετρήσιμη ως σύνθεση των μετρήσιμων I_B και π_d.

□

Παράδειγμα 3.4.2. Έστω $E = C(T, S) \subset \prod_{t\in T} S = S^T$ όπου $T = [0, \infty)$ και S πολωνικός τοπολογικός χώρος.Τότε $E \notin \bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(S)$.

Πράγματι αν ήταν $E \in \bigotimes_{t\in T}\mathscr{B}(E)$ τότε κατά την Πρόταση 3.4.1. θα ήταν $I_E = I_B \circ \pi_d$ όπου $d \subset T$ αριθμήσιμο και περιλαμβάνει τους ρητούς του $T = [0, \infty)$ και συνεπώς πυκνό στο T. Έστω $t_0 \in T \setminus d$ και θεωρούμε μια **συνεχή** $x \in E$. Έστω $x(t_0) = a \in S$. Ορίζουμε $y : T \mapsto S$ ως ακολούθως: $y(t) = x(t)$ όταν $t \in d, y(t_0) = b \in S$ με $b \neq a$ και αυθαίρετα όταν $t \notin d \cup \{t_0\}$. Τότε η y είναι **ασυνεχής** (τουλάχιστον στο t_0.) Όμως από τον ορισμό $\pi_d(x) = \pi_d(y)$ και συνεπώς από την $I_E = I_B \circ \pi_d$ συμπεραίνουμε ότι $I_E(x) = I_E(y)$- άτοπο αφού $I_E(x) = 1$ και $I_E(y) = 0$.

Άσκηση 28. $T = [0,\infty)$ και $[a,b] \subset T$ με $a < b$. $X = \prod\limits_{t\in T} \mathbb{R} = \mathbb{R}^T$. Έστω $E = \{x \in X : \sup\limits_{a\leq t\leq b} x(t) < c\}$ όπου $c \in \mathbb{R}$ και $Z = \prod\limits_{t\in T} A_t$,όπου $A_t = [\gamma,\delta]$ όταν $t \in [a,b]$ ενώ $A_t = \mathbb{R}$ όταν $t \notin [a,b]$. Δείξτε ότι E, Z **δεν** ανήκουν στην $\bigotimes\limits_{t\in T} \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Έστω ακόμα μη κενό συμπαγές $K \subset X$ για την τοπολογία γινόμενο του X. Δείξτε ότι $K \notin \bigotimes\limits_{t\in T} \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Άσκηση 29. $T = [0,\infty)$ και $X = \mathbb{R}^T$.Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων στο T, το σύνολο των αύξουσων συναρτήσεων στο T, το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο T **δεν** ανήκουν στην $\bigotimes\limits_{t\in T} \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 3.4.3. Στις παρατηρήσεις που ακολουθούν T είναι υπεραριθμήσιμο, S είναι **πολωνικός** τοπ. χώρος, $I = \{i \subset T : i \text{ πεπερασμένο}\}$ και $X_i = \prod\limits_{t\in i} S = S^i$, $\mathscr{B}_i = \bigotimes\limits_{t\in i} \mathscr{B}(S)$, $X = \prod\limits_{t\in T} S = S^T$, $\mathscr{A} = \bigotimes\limits_{t\in T} \mathscr{B}(S)$.
Επίσης για $i \subset j$ στο I θα είναι $\pi_i : X \mapsto X_i$ και $\pi_{ij} : X_j \mapsto X_i$ οι συνήθεις προβολές που ορίζονται από τις $\pi_i(x) = x|i$ και $\pi_{ij}(y) = y|i$ αντίστοιχα.
Επειδή οι χώροι S^i είναι πολωνικοί,οι σ-άλγεβρες γινόμενο $\mathscr{B}_i$ συμπίπτουν με τις σ-άλγεβρες Borel των $X_i, i \in I$.
Αν μ_i είναι μέτρα πιθανότητας ορισμένα στους $(X_i, \mathscr{B}_i), i \in I$ τότε ικανή (και αναγκαία) συνθήκη ώστε να ισχύει το Θεώρημα Kolmogorov είναι η συνθήκη **συμβιβαστότητας**

$$\mu_j(\pi_{ij}^{-1}(B)) = \mu_i(B) \text{ για όλα τα } i \subset j \text{ στο } I \text{ και } B \in \mathscr{B}_i$$

1. Για να ισχύει η παραπάνω είναι αρκετό να επαληθεύεται για $i \subset j$ με $j \setminus i$ να είναι μονοσύνολο και τούτο διότι στη γενική περίπτωση $i \subset j$ υπάρχουν σύνολα $h_0 = i \subset h_1 \subset ... \subset h_n = j$ με $h_m \setminus h_{m-1}$ να είναι μονοσύνολα και επιπλέον:
$$\pi_{ij} = \pi_{h_o h_1} \circ ... \circ \pi_{h_{n-1}h_n}$$
2. Συχνά στις εφαρμογές μάς δίνεται μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\mu_u, u \in \Lambda$ όπου $\Lambda = \{(t_1,...,t_n) \in T^n : n \in \mathbb{N} \text{ και } t_k \neq t_m \text{ για } k \neq m\}$ ορισμένων στους $(S^n, \mathscr{B}(S_n))$.
Τότε εκτός της συνθήκης συμβιβαστότητας απαιτείται και μια συνθήκη **συμμετρίας**: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $u = (t_1,...,t_n) \in \Lambda$ και κάθε μετάθεση s του $\{1,2,...,n\}$ και $v = (t_{s(1)},...,t_{s(n)})$ ισχύει:
$$\mu_u(A_1 \times ... \times A_n) = \mu_v(A_{s(1)} \times ... \times A_{s(n)})$$
για όλα τα $A_1,...,A_n$ στην $\mathscr{B}(S)$.
Μάλιστα στην περίπτωση αυτή λόγω της παρατήρησης (1) παραπάνω για την ισχύ της συνθήκης συμβιβαστότητας αρκεί να επαληθεύσουμε ότι : Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $u = (t_1,...,t_n) \in \Lambda$ και $v = (t_1,...,t_n,t)$ με $t \in T \setminus \{t_1,...,t_n\}$ ισχύει:
$$\mu_u(B) = \mu_v(B \times S)$$

για όλα τα $B \in \mathscr{B}(S^n)$ (ή μόνο για τα B της μορφής $A_1 \times ... \times A_n, A_m \in \mathscr{B}(S)$).
Υπό τις δυο αυτές συνθήκες το θεώρημα Kolmogorov μας εξασφαλίζει ένα μέτρο μ στον $(X, \mathscr{A})$ που ικανοποιεί την απαίτηση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $u = (t_1, ..., t_n) \in \Lambda$

$$\mu((\pi_{t_1}, ..., \pi_{t_n})^{-1}(B)) = \mu_u(B) \text{ για κάθε } B \in \mathscr{B}(B^n)$$

όπου $\quad \pi_t = \pi_{\{t\}} : X \mapsto S$ η $\pi_t(x) = x(t)$.
Τυπικό παράδειγμα των παραπάνω είναι το ακόλουθο:

> Έστω $\{v_t, t \in T\}$ μέτρα πιθανότητας στον $(S, \mathscr{B}(S))$.
> Για $n \in \mathbb{N}, u = (t_1, ..., t_n) \in \Lambda$ θέτουμε
>
> $$\mu_u = v_{t_1} \otimes ... \otimes v_{t_n}$$
>
> τα μέτρα γινόμενα στους $(S^n, \mathscr{B}(S_n))$.
> Εύκολα επαληθεύονται οι συνθήκες συμμετρίας και συμβιβαστότητας και συνεπώς υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{A} = \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(S))$ εις τρόπον ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(t_1, ..., t_n) \in \Lambda$ και $A_1, ..., A_n$ στην $\mathscr{B}(S)$ ισχύει:
>
> $$\mu(\bigcap_{m=1}^{n} \pi_{t_m}^{-1}(A_m)) = v_{t_1}(A_1)...v_{t_n}(A_n)$$
>
> Σημειώστε ότι το σύνολο $\bigcap_{m=1}^{n} \pi_{t_m}^{-1}(A_m) = \prod_{t\in T} E_t$ όπου $E_{t_1} = A_1, ..., E_{t_n} = A_n$ και $E_t = S$ για κάθε $t \in T \setminus \{t_1, ..., t_n\}$ (επαληθεύστε). Εύλογα το μέτρο μ ονομάζεται μέτρο γινόμενο των $v_t, t \in T$ και γράφουμε $\mu = \bigotimes_{t\in T} v_t$.

3. Σε εφαρμογές όπου $T = [0, \infty)$ αρκεί να δοθούν μέτρα πιθανότητας μ_i για $i = \{t_1 < ... < t_n\} \subset T$ αφού κάθε $i \in I$ μπορεί να διαταχθεί με αυτόν τον τρόπο και αρκεί η συνθήκη συμβιβαστότητας να επαληθευτεί για $i = \{t_1 < ... < t_n\}$ και $j \supset i$ με $j \setminus i = \{t\}$ όπου $t \in T \setminus \{t_1, ...t_n\}$. Συνήθως η επαλήθευση γίνεται χωριστά για $t < \min t_m,\ t > \max t_m$ ή $t_{m-1} < t < t_m$ για κάποιο $m \in \{2, ..., n\}$.

Άσκηση 30. T μη πεπερασμένο και συνάρτηση $K : T \times T \mapsto \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για την συνάρτηση K ισχύουν:

- $K(s, t) = K(t, s)$ για κάθε $(s, t) \in T \times T$
- για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\{t_1, ..., t_n\} \subset T$ και $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}$ ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i, t_j)x_i x_j \geq 0 \quad \text{(μη αρνητικά ορισμένη).}$$

Για κάθε $u = (t_1, ..., t_n) \in \Lambda = \{(t_1, ..., t_n) \in T^n$ με $t_i \neq t_j$ για $i \neq j\}$ μ_n είναι το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ από την κανονική κατανομή $N(0, \Sigma)$ όπου $\Sigma = [K(t_i, t_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$. Δείξτε ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στον $(\mathbb{R}^T, \bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}^1)$ εις τρόπον ώστε $\mu((\pi_{t_1}, ..., \pi_{t_n})^{-1}(B)) = \mu_u(B)$ για κάθε $u = (t_1, ..., t_n) \in \Lambda$ και $B \in \mathscr{B}^n$.

Άσκηση 31. Έστω Ε πολωνικός τοπ. χώρος.Ονομάζεται **μετρήσιμος πυρήνας Markov** στον $(E, \mathscr{B})$ μια συνάρτηση $K : E \times \mathscr{B} \mapsto \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις:

- για τυχόν $x \in E$ η απεικόνιση $B \mapsto K(x, B)$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathscr{B})$.
- για τυχόν $B \in \mathscr{B}$ η απεικόνιση $x \mapsto K(x, B)$ είναι $\mathscr{B}$-μετρήσιμη.

Έστω τώρα $T = [0, \infty)$ και $\{K_t, t \in T\}$ οικογένεια πυρήνων Markov που ικανοποιεί την:
Για όλα τα $s, t \in T$ ισχύει για κάθε $x \in E$ και $A \in \mathscr{B}$

$$K_{s+t}(x, A) = \int K_t(y, A) K_s(x, dy) \qquad (\star)$$

(εξισώσεις Chapman-Kolmogorov)

i. Δείξτε ότι η $(\star)$ ισοδυναμεί με την: για κάθε $f : E \mapsto \mathbb{R}$ που είναι $\mathscr{B}$-μετρήσιμη και μη-αρνητική ισχύει για κάθε $x \in E$

$$\int f(z) K_{s+t}(x, dz) = \int (\int f(z) K_s(y, dz)) K_t(x, dy)$$

ii. Θέτουμε $P_t(x, y) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{2t}|x-y|^2}$ για $t > 0, x, y \in \mathbb{R}^m$.
Για $t > 0$ ορίζουμε (την **ημιομάδα της Κίνησης Brown**)

$$K_t(x, B) = \int_B P_t(x, y) dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^m \; , B \in \mathscr{B}^m$$

και

$$K_0(x, B) = \delta_0(B - x) = \delta_x(B) = I_B(x)$$

Δείξτε ότι η $\{K_t, t \geq 0\}$ είναι οικογένεια πυρήνων Markov που ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorv.

Άσκηση 32. [7]
Έστω $\{K_t, t \in T\}, T = [0, \infty)$ οικογένεια πυρήνων Markov στον $(E, \mathscr{B})$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov $(\star)$ της Άσκησης 31. Έστω ακόμα μ_0 μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathscr{B})$ και E πολωνικός τοπ. χώρος. Για κάθε $j = \{t_1 < ... < t_n\} \subset T$ και $B \in \mathscr{B}(E^n)$ ορίζουμε

$$\mu_j(B) = \int ... \int I_B(x_1, ..., x_n) K_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) ... K_{t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0)$$

Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ στον $(E^T, \mathscr{A} = \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(E))$ εις τρόπον ώστε να ισχύει για κάθε $J = \{t_1 < t_2 < ... < t_n\}$ και $B \in \mathscr{B}(E^n)$ η σχέση $\mu((\pi_{t_1}, ..., \pi_{t_n})^{-1}(B)) = \mu_j(B)$.
Επιπλέον

i. Αν $K_0(x, B) = \delta_x(B)$ τότε $\mu(\pi_0^{-1}(A)) = \mu_0(A), \quad A \in \mathscr{B}$

ii. Αν $\mathscr{F}_s = \sigma(\pi_u : 0 \leq u \leq s)$ και $t > s$, $A \in \mathscr{B}(E)$
τότε $\mu(\pi_t^{-1}(A) \cap Q) = \int_Q K_{t-s}(\pi_s, A)d\mu$ για κάθε $Q \in \mathscr{F}_s$

Η τελευταία σε γλώσσα πιθανοτήτων και με P στη θέση του μ γράφεται $P(\pi_t \in A|\mathscr{F}_s) = K_{t-s}(\pi_s, A)$ και καθιστά την στοχαστική διαδικασία $Y_t = \pi_t$ μια διαδικασία Markov.

Το μέτρο μ στον $(S^T, \mathscr{A} = \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(S))$ που εξασφαλίζει το θεώρημα Kolmogorov **δεν** μπορεί να είναι κανονικό αφού (τουλάχιστον όταν T υπεραριθμήσιμο) η σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(S^T)$ ακόμα και όταν ο S είναι πολωνικός (ακόμα και όταν $S = \mathbb{R}$). Εξάλλου όπως είδαμε παραπάνω η σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι μάλλον φτωχή σε υποσύνολα. Αν όμως το μέτρο μ "περιοριστεί" σε υποσύνολο $M \subset S^T$ είναι δυνατόν να προκύψει "βελτιωμένη" συμπεριφορά του μέτρου μ (τουλάχιστον στην περίπτωση που το σύνολο M διαθέτει κατάλληλα τοπολογικά γνωρίσματα). Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.29. σελ. 11 τα παραπάνω είναι καταρχήν εφικτά όταν $\mu^*(M) = 1$.

Πρόταση 3.4.4. *Υπό τις προϋποθέσεις και συμβολισμούς του Θεωρήματος Kolmogorov υποθέτουμε επιπλέον ότι $S_t = S, t \in T$ και ότι το υποσύνολο $M \subset \prod_{t\in T} S = S^T$ έχει $\mu^*(M) = 1$ όπου μ^* το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mu, \mathscr{A} = \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}(S))$. Υποθέτουμε ακόμα ότι το σύνολο M έχει τοπολογία πολωνικού χώρου τέτοια ώστε η αντίστοιχη σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}(M)$ να συμπίπτει με την σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_M = \{A \cap M : A \in \mathscr{A}\}$. Τότε η συνολοσυνάρτηση $\mu_0 : \mathscr{A}_M \mapsto [0,1] : \mu_0(A \cap M) = \mu(A)$ ορίζει κανονικό μέτρο στον $(M, \mathscr{A}_M)$ και είναι το μοναδικό που για κάθε $i \in I$ και $B \in \mathscr{B}_i$ ικανοποιεί την*

$$\mu_0(\Pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$$

όπου $\Pi_i = \pi_i|M$.

Απόδειξη. Το ότι η μ_0 ορίζει μέτρο πιθανότητας εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.1.29. της σελ. 11. Το ότι είναι κανονικό προκύπτει από το γεγονός ότι ο χώρος M είναι πολωνικός με $\mathscr{B}(M) = \mathscr{A}_M$ (δες Θεώρημα 2.5.7.). Τέλος για $i \in I, B \in \mathscr{B}_i$ έχουμε $\mu_0(\Pi_i^{-1}(B)) = \mu_0(\pi_i^{-1}(B) \cap M) = \mu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$
Επειδή τώρα $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$ όπου $\mathscr{C} = \{\pi_i^{-1}(B) : i \in I, B \in \mathscr{B}\}$ θα είναι (κατά την πρόταση 1.1.28.) $\mathscr{A}_M = \sigma(\mathscr{C}_M)$ όπου $\mathscr{C}_M = \{A \cap M : A \in \mathscr{C}\}$. Όμως η κλάση $\mathscr{C}_M$ γράφεται $\{\Pi_i^{-1}(B) : i \in I, B \in \mathscr{B}_i\}$ και είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές (ως άλγεβρα). Άρα το μ_0 στον $(M, \mathscr{A}_M = \sigma(\mathscr{C}_M))$ είναι μοναδικό.

□

Παράδειγμα 3.4.5.

1. $T = [0,1]$ ή $[0,\infty), S = \mathbb{R}^m, M = C(T,\mathbb{R}^m)$.
   Τότε κατά τα εκτεθέντα στην παράγραφο 2.6. ο χώρος M είναι πολωνικός και $\mathscr{B}(M) = \mathscr{A}_M$ (δες Θεώρημα 2.6.1. και Άσκηση 27)

2. $T = [0,1]$, $S = \mathbb{R}$, $M = D([0,1])$ - το σύνολο των συναρτήσεων : $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ για τις οποίες

   (α′) Υπάρχει το $\lim\limits_{t\to\xi_-} x(t)$ για κάθε $\xi \in (0,1]$.

   (β′) Υπάρχει το $\lim\limits_{t\to\xi_+} x(t)$ και ισούται με $x(\xi)$ για κάθε $\xi \in [0,1)$

   είναι δηλαδή δεξιά συνεχείς στο $[0,1)$.
   Το σύνολο $M = D([0,1])$ με την **τοπολογία** Skorohod είναι πολωνικός χώρος και $\mathscr{B}(M) = \mathscr{A}_M = \sigma(\pi_t^{-1}(B) : t \in [0,1], B \in \mathscr{B}((R)))$ (δες [4] σελ. 231 , 249) με $\pi_t : M \mapsto \mathbb{R}$ την $\pi_t(x) = x(t)$.

Τι όμως εξασφαλίζει ότι $\mu^*(M) = 1$; Ακριβέστερα, με ποιές συν΄θηκες στα μέτρα $\mu_i, i \in I$ εξασφαλίζεται ότι $\mu^*(M) = 1$ και συνεπώς ένα μέτρο μ_0 στο M τέτοιο ώστε $\mu_0(\Pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B), i \in I, B \in \mathscr{B}_i$. Ένα συναφές και κλασσικό αποτέλεσμα είναι το παρακάτω για το οποίο παραπέμπουμε στο [4] σελ. 216.

Θεώρημα 3.4.6. *Στα πλαίσια του θεωρήματος Kolmogorov υποθέτουμε επιπλέον ότι $T = [0,\infty), S_t = \mathbb{R}$ και ότι υπάρχουν αριθμοί $a, \delta, k > 0$ τέτοιοι ώστε:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u-v|^a d\mu_{\{s,t\}}(u,v) \leq k|t-s|^{1+\delta} \quad \forall s,t \in T$$

Έστω $M = C(T,\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο μ_0 στον $(M,\mathscr{B}(M))$ εις τρόπον ώστε για κάθε $i \in I$ και $B \in \mathscr{B}_i$ να είναι $\mu_0(\Pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$.

Ένα ακόμα πιο ισχυρό από το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να αναζητήσει ο αναγνώστης στο [15] σελ. 351.

3.5 Θεώρημα Ionescu-Tulcea

Υπό ορισμένες προϋποθέσεις στα "περιθώρια" μέτρα μ_i μπορούμε να επιτύχουμε την κατασκευή "προβολικού" μέτρου μ στο καρτεσιανό γινόμενο χωρίς τοπολογικές υποθέσεις και υποθέσεις κανονικότητας των μέτρων. Πρόκειται απλά για μέτρα σε αφηρημένους χώρους. Το αντίστοιχο πεπερασμένο αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα 1.4.6. και όπως συμβαίνει σε αυτό είναι και εδώ απαραίτητη η έννοια της **πιθανότητας μεταφοράς** από ένα μετρήσιμο χώρο $(X,\mathscr{F})$ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(Y,\mathscr{H})$. Πρόκειται για μια συνάρτηση $K : X \times \mathscr{H} \mapsto [0,1]$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

1. για κάθε $x \in X$ η $K(x,\cdot)$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(Y,\mathscr{H})$

2. για κάθε $B \in \mathscr{H}$ η συνάρτηση $K(\cdot,B)$ είναι $\mathscr{F}$-μετρήσιμη.

Προκειμένου να παραμείνει λογική η έκταση των χρησιμοποιούμενων τύπων θα γίνει χρήση του συμβολισμού:
$\bar{x}_n = (x_0, x_1, ..., x_n) \quad n = 0, 1, ...$

Θεώρημα 3.5.1. *(Ionescu-Tulcea)*
Έστω μετρήσιμοι χώροι $(S_n, \mathscr{A}_n), n = 0, 1, ...$
Θέτουμε $\quad X_n = \prod_{k=0}^{n} S_k, \mathscr{F}_n = \bigotimes_{k=0}^{n} \mathscr{A}_k \quad$ *και* $X = \prod_{k=0}^{\infty} S_k\ ,\ \mathscr{F} = \bigotimes_{k=0}^{\infty} \mathscr{A}_k.$
Υποθέτουμε ότι για έκαστο $n = 0, 1, ...$ *δίνεται πιθανότητα μεταφοράς* $P^n_{n+1}(\bar{x}_n, A), \bar{x}_n \in X_n$ *και* $A \in \mathscr{A}_{n+1}$ *από τον* $(X_n, \mathscr{F}_n)$ *στον* $(S_{n+1}, \mathscr{A}_{n+1})$.
Για έκαστο μέτρο πιθανότητας v *στον* $(S_0, \mathscr{A}_0)$ *ορίζουμε μέτρα* μ^v_n *στους* $(X_n, \mathscr{F}_n), n = 0, 1, ...$ *ως ακολούθως:*

$$\mu^v_n(F) = \int v(dx_0) \int P^0_1(\bar{x}_0, dx_1) ... \int P^{n-1}_n(\bar{x}_{n-1}, dx_n) I_F(\bar{x}_n)$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\mu^v_{n+1}(\pi^{-1}_{n,n+1}(A)) = \mu^v_n(A)$ *για κάθε* $n = 0, 1, ...$ *και* $A \in \mathscr{F}_n$

2. *Υπάρχει ένα και μοναδικό μέτρο πιθανότητας* μ^v *στον* $(X, \mathscr{F})$ *εις τρόπον ώστε* $\mu^v(\pi^{-1}_n(A)) = \mu^v_n(A)$ *για κάθε* $n = 0, 1, ...$ *και* $A \in \mathscr{F}_n$ *(όπου* $\pi_n : X \mapsto X_n$ *η συνήθης προβολή)*

3. *Αν* $\delta_x, x \in S_0$ *είναι μέτρα Dirac στον* $(S_0, \mathscr{A}_0)$ *τότε*

$$\mu^v(A) = \int \mu^{\delta_x}(A) v(dx), A \in \mathscr{F}.$$

Απόδειξη. Δες [19] ή [8]. □

Σημείωση: Παρά την ισχύ της συνθήκης συμβιβαστότητας για τα μέτρα μ^v_n , $n = 0, 1, ...$ δεν μπορούμε να επικαλεστούμε το θεώρημα Prohorov ή το θεώρημα Kolmogorov ελλείψει τοπολογίας και κανονικότητας των μέτρων. Αυτό είναι άλλωστε η πρωτοτυπία του Θεωρήματος Ionescu-Tulcea.

Πόρισμα 3.5.2. Έστω μετρήσιμος χώρος $(S, \mathscr{A})$ και θέτουμε $X_n = \prod_{k=0}^{n} S\ ,\ \mathscr{F}_n = \bigotimes_{k=0}^{n} \mathscr{A}$ και $X = \prod_{k=0}^{\infty} S\ ,\ \mathscr{F} = \bigotimes_{k=0}^{\infty} \mathscr{A}_k$. Έστω πιθανότητα μεταφοράς $K(x, A), x \in S$ και $A \in \mathscr{A}$ από τον $(S, \mathscr{A})$ στον $(S, \mathscr{A})$ (πρόκειται βέβαια για πυρήνα Markov). Για έκαστο μέτρο πιθανότητας v στον $(S, \mathscr{A})$ ορίζουμε μέτρα μ^v_n στους $(X_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 0, 1, ...$ ως ακολούθως:

$$\mu^v_n(F) = \int v(dx_0) \int K(x_0, dx_1) ... \int K(x_{n-1}, dx_n) I_F(\bar{x}_n)$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ^v στον $(X, \mathscr{F})$ εις τρόπον ώστε $\mu^v(\pi_n^{-1}(A)) = \mu_n^v(A)$ για κάθε $n = 0, 1, ...$ και $A \in \mathscr{F}_n$

2. $\mu^v(A) = \int \mu^{\delta_x}(A) v(dx), A \in \mathscr{F}$

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα με $P_{n+1}^n(\bar{x}_n, A) = K(x_n, A)$ για $n = 0, 1, ...$ και $A \in \mathscr{A}$.

□

Παρατήρηση 3.5.3.

1. Η ερμηνεία της πιθανότητας μεταφοράς είναι η ακόλουθη:

   > $P_{n+1}^n(\bar{x}_n, A)$ είναι η πιθανότητα ώστε ένα σύστημα να βρεθεί τη χρονική στιγμή $n+1$ στην κατάσταση A όταν τις προηγούμενες χρονικές στιγμές $0, 1, ...n$ διαγράφει τη διαδρομή $(x_0, x_1, ..., x_n) = \bar{x}_n$.

   Προφανώς **δεν** πρόκειται για σύστημα Markov. Το τελευταίο συμβαίνει όταν η $P_{n+1}^n(\bar{x}_n, A)$ δεν εξαρτάται από τις $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ και εξαρτάται μόνο από την x_n. Δοκιμάστε την παραπάνω ερμηνεία σε αυτήν την περίπτωση.

2. Στα πλαίσια του πορίσματος τώρα θέτουμε $K_0(x, A) = I_A(x)$ και για $m \geq 1$ ορίζουμε για $x \in S, A \in \mathscr{A}$

   $$K_m(x, A) = \int K(x, dx_{k+1}) ... \int K(x_{k+m-1}, dx_{k+m}) I_A(x_{k+m})$$

   Τότε αποδεικνύεται ότι οι $\{K_m(x, A), m = 0, 1, ...\}$ είναι πιθανότητες μεταφοράς από τον $(S, \mathscr{A})$ στον $(S, \mathscr{A})$ και μάλιστα ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

   $$K_{m+r}(x, A) = \int K_r(y, A) K_m(x, dy)$$

   για όλα τα $m, r \in \{0, 1, ...\}, x \in S$ και $A \in \mathscr{A}$.
   Λαμβάνοντας υπόψην ότι $K_1(x, A) = K(x, A)$ διαπιστώνουμε αμέσως ότι σε αυτήν την περίπτωση το παραπάνω πόρισμα είναι η διακριτή εκδοχή του αποτελέσματος που βρίσκεται στην Άσκηση 32. Αρκεί να συγκρίνουμε τα μέτρα μ_n^v του πορίσματος με τα μέτρα μ_j της άσκησης για $j = \{0, 1, ..., n\}$. Πάντα στα πλαίσια του πορίσματος αποδεικνύεται ότι:

   > Για $s < t$ στο $\{0, 1, ...\}$ και $Q \in \mathscr{F}_s = \sigma(\{\pi_u^{-1}(A) : 0 \leq u \leq s, A \in \mathscr{A})$ όπου $\pi_u : X \mapsto S, u \in \{0, 1, ...\}$ οι συνήθεις προβολές, ισχύει:
   >
   > $$\mu(\pi_t^{-1}(A) \cap Q) = \int_Q K_{t-s}(\pi_s, A) d\mu, A \in \mathscr{A}$$

Η τελευταία σε γλώσσα πιθανοτήτων και με P στη θέση του μ γράφεται $P(\pi_t \in A|\mathscr{F}_s) = K_{t-s}(\pi_s, A)$ και καθιστά την στοχαστική ανέλιξη $Y_t = \pi_t, t \in \{0, 1, ...\}$ μια **αλυσίδα** Markov σε διακριτό χρόνο και **χώρο καταστάσεων** S (όχι κατ ανάγκη διακριτό). Η ερμηνεία της $K_m(x, A)$ είναι φανερή:

> Η πιθανότητα ώστε το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση A σε m χρονικές μονάδες από την παρούσα στιγμή που βρίσκεται στο x.

Άσκηση 33. Έστω $(S_n, \mathscr{A}_n, \mu_n), n = 0, 1, ...$ χώροι πιθανότητας. Έστω $X = \prod_{n=0}^{\infty} S_n$ και $\mathscr{A} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathscr{A}_n$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{A})$ εις τρόπον ώστε για κάθε $n \in \{0, 1, ...\}$ και $A_0 \in \mathscr{A}_0, ..., A_n \in \mathscr{A}_n$ να ισχύει:

$$\mu(A_0 \times ... \times A_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times ...) = \mu_0(A_0)...\mu_n(A_n)$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα Ionescu-Tulcea για $v = \mu_0$ και $P_{n+1}^n(\bar{x}_n, A) = \mu_{n+1}(A)$. Υπό αυτές τις συνθήκες εύκολα επαληθεύεται ότι $\mu_n^v(A_0 \times ... \times A_n) = \mu_0(A_0)...\mu_n(A_n)$.

Άσκηση 34. (Θεώρημα von Neumann)
Έστω T υπεραριθμήσιμο και $(S_t, \mathscr{A}_t, \mu_t), t \in T$ χώροι πιθανότητας. Έστω $X = \prod_{t \in T} S_t$ και $\mathscr{A} = \bigotimes_{t \in T} \mathscr{A}_t$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{A})$ εις τρόπον ώστε να ισχύει για κάθε $j = \{t_1, ..., t_n\} \subset T$ και $A_1 \in \mathscr{A}_{t_1}, ..., A_n \in \mathscr{A}_{t_n}$ και με $\pi_j : X \mapsto \prod_{t \in j} S_t$ τη συνήθη προβολή:

$$\mu(\pi_j^{-1}(A_1 \times ... \times A_n)) = \bigotimes_{t \in j} \mu_t(A_1 \times ... \times A_n)$$

(Σημειώστε ότι $\pi_j^{-1}(A_1 \times ... \times A_n) = \prod_{t \in T} E_t$ όπου $E_t = S_t$ για κάθε $t \in T \setminus j$ και $E_{t_k} = A_k$ για $k = 1, ..., n$).

Υπόδειξη: Όπως το θεώρημα Kolmogorov προκύπτει από το διακριτό ανάλογο Θεώρημα 3.2.3. έτσι και το παρόν αποτέλεσμα προκύπτει από την Άσκηση 33. Μιμηθείτε τη διαδικασία με $D = \{d \subset T : d$ αριθμήσιμο$\}$ κλπ.

Κεφάλαιο 4

Μέτρα πιθανότητας σε τοπ. διαν. χώρους

4.1 Στοιχεία θεωρίας τοπικά κυρτών τοπ. διαν. χώρων

Έστω X διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Ένα υποσύνολο $A \subset X$ ονομάζεται:

- **κυρτό** όταν για όλα τα $x, y \in A$ και $t \in [0,1]$ ισχύει ότι $tx + (1-t)y \in A$.
- **ισόρροπο** (balanced) όταν για όλα τα $x \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| \leq 1$ ισχύει $\lambda x \in A$. Τότε προφανώς $0 \in A$.
- **απορροφών** (absorbent) όταν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\lambda > 0$ με $\lambda x \in A$.

Ένας τοπολογικός Hausdorff διανυσματικός χώρος X ονομάζεται **τοπικά κυρτός** όταν έχει μια τοπική βάση του 0 από κυρτά,ισόρροπα σύνολα ή ισοδύναμα όταν παράγεται από μια οικογένεια seminorn $\{\rho_a, a \in \Lambda\}$ που διαχωρίζει σημεία (δηλαδή για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει $a \in \Lambda$ με $\rho_a(x) > 0$). Τότε τα σύνολα της μορφής:

$$\bigcap_{a \in i} \{x \in X : \rho_a(x) < \epsilon_a\}$$

με i πεπερασμένο $\subset \Lambda$ και $\epsilon_a > 0$ είναι κυρτά, ισόρροπα, και αποτελούν τοπική βάση του 0.
Έστω τώρα X ένας τοπικά κυρτός διανυσματικός χώρος X με τοπολογία ξ. Ένα υποσύνολο $A \subset X$ ονομάζεται **φραγμένο** για την τοπολογία ξ ή απλά **ξ-φραγμένο** όταν για κάθε περιοχή U του 0 υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε: $A \subset \nu U$ για κάθε $\nu > \lambda$.

Έστω τοπικά κυρτός τοπ. διαν. χώρος X με τοπολογία ξ. Με το σύμβολο X' θα γράφεται ο δυϊκός του X δηλαδή το σύνολο των ξ-συνεχών γραμμικών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X. Προκειμένου να διευκρινιστεί (όπου χρειάζεται) η τοπολογία ως προς την οποία είναι συνεχείς οι συναρτήσεις του X' θα γράφουμε:

$$(X, \xi)' = X'$$

Οι τοπολογίες του X και του X' στις οποίες αναφερόμαστε στη συνέχεια αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των λεγόμενων **πολικών τοπολογιών** στις οποίες όμως δεν θα επεκταθούμε. Ο ενδιαφερόμενος παραπέμπεται π.χ. στο Robertson Robertson: Topological Vector Spaces. Όλες οι παρακάτω τοπολογίες είναι τοπικά κυρτές και παράγονται από την οικογένεια seminorm που αναφέρεται:

- $\sigma(X, X')$ **ασθενής** τοπολογία του X

  $$\{\rho(\cdot) = |<\cdot, x'>|, x' \in X'\}$$

  Είναι η ασθενέστερη τοπολογία του X για την οποία όλες οι παραπάνω seminorm είναι συνεχείς συναρτήσεις στο X.
  Προφανώς $\quad \sigma(X, X') \subset \xi$
  και αποδεικνύεται ότι $\quad (X', \sigma(X', X))' = X'$
  Η σύγκλιση ενός δικτύου $\{x_i, i \in I\} \subset X$ στην τοπολογία $\sigma(X, X')$ έχει ως ακολούθως:

  $$x_i \to x \Leftrightarrow x'(x_i) \to x'(x) \text{ για κάθε } x' \in X'.$$

- $\sigma(X', X)$ **ασθενής** τοπολογία του X' (weak*)

  $$\{q(\cdot) = |<x, \cdot>|, x \in X\}$$

  Για την $\sigma(X', X)$ ισχύει:

  $$(X', \sigma(X', X))' = X$$

  και η σύγκλιση δικτύου $\{x'_i, i \in I\} \subset X'$ έχει ως εξής:

  $$x'_i \to x' \Leftrightarrow x'_i(x) \to x'(x) \text{ για κάθε } x \in X$$

  (πρόκειται για κατά σημείο σύγκλιση)

- $\mathscr{C}(X, X')$ **ισχυρή** τοπολογία του X

  $$\{\rho'_B(\cdot) = \sup_{x' \in B} |<\cdot, x'>|, B \in \mathscr{D}'\}$$

  όπου $\mathscr{D}' = \{B \subset X' : B \text{ είναι } \sigma(X', X)\text{-φραγμένο}\}$.
  Για την $\mathscr{C}(X, X')$ ισχύει:

  $$\sigma(X, X') \subset \mathscr{C}(X, X')$$

  και για τη σύγκλιση

  $$x_i \to x \Leftrightarrow x'(x_i) \to x'(x) \text{ ομοιόμορφα ως προς } x' \in B$$

  και αυτό για κάθε $\sigma(X', X)$-φραγμένο $B \in \mathscr{D}'$.

- $\mathscr{C}(X', X)$ **ισχυρή** τοπολογία του X'

$$\{q'_A(\cdot) = \sup_{x \in A} | < x, \cdot > |, A \in \mathscr{D}\}$$

όπου $\mathscr{D} = \{A \subset X : A$ είναι $\sigma(X, X')$-φραγμένο$\}$
Για την $\mathscr{C}(X', X)$ ισχύει:

$$\sigma(X', X) \subset \mathscr{C}(X', X)$$

Για την αντίστοιχη σύγκλιση έχουμε:

$$x'_i \to x' \Leftrightarrow x'_i(x) \to x'(x) \text{ ομοιόμορφα για } x \in A$$

και αυτό για κάθε $\sigma(X, X')$-φραγμένο $A \in \mathscr{D}$.

Στην καθιερωμένη γλώσσα της θεωρίας των τοπικά κυρτών χώρων οι τοπολογίες $\sigma(X, X')$ και $\sigma(X', X)$ είναι οι ασθενέστερες πολικές τοπολογίες και οι $\mathscr{C}(X, X')$, $\mathscr{C}(X', X)$ είναι οι ισχυρότερες πολικές τοπολογίες του δυϊκού ζεύγους (X, X').

Από τις "ενδιάμεσες" τοπολογίες σημαντικές είναι οι παρακάτω:

- $\tau(X, X')$: Mackey τοπολογία του X

$$\{\rho'_\Gamma(\cdot) = \sup_{x' \in \Gamma} | < \cdot, x' > | : \Gamma \in \mathscr{E}'\}$$

όπου $\mathscr{E}' = \{\Gamma \subset X' : \Gamma$ είναι κυρτό,ισόρροπο και $\sigma(X', X)$ συμπαγές$\}$.
Για την τοπολογία $\tau(X, X')$ ισχύουν:

$$\sigma(X, X') \subset \tau(X, X') \subset \mathscr{C}(X, X')$$

και από το θεώρημα Mackey-Arens

$$\sigma(X, X') \subset \xi \subset \tau(X, X')$$

και $\quad (X, \tau(X, X'))' = X'$.
Η τοπολογία $\tau(X, X')$ είναι η ισχυρότερη για την οποία ο δυϊκός του X είναι ο X'. Όσο για τη σύγκλιση $x_i \to x \Leftrightarrow x'(x_i) \to x'(x)$ ομοιόμορφα για $x' \in \Gamma$ και αυτό για κάθε $\Gamma \in \mathscr{E}'$.

- $\tau(X', X)$: Mackey τοπολογία του X'

$$\{q'_\Delta(\cdot) = \sup_{x \in \Delta} | < x, x' > | : \Delta \in \mathscr{E}\}$$

όπου $\mathscr{E} = \{\Delta \subset X : \Delta$ κυρτό, ισόρροπο και $\sigma(X, X')$-συμπαγές$\}$ Τότε

$$\sigma(X', X) \subset \tau(X'X) \subset \mathscr{C}(X', X)$$

και

$$(X', \tau(X', X))' = X$$

Η αντίστοιχη σύγκλιση $x'_i \to x' \Leftrightarrow x'_i(x) \to x'(x)$ ομοιόμορφα για κάθε $x \in \Delta$ και αυτό για κάθε $\Delta \in \mathscr{E}$.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω τοπικά κυρτός τοπ. διαν. χώρος X. Ονομάζεται* **δισδυϊκός** *του X ο δυϊκός του $(X', \mathscr{C}(X', X))$. Είναι δηλαδή $X'' = (X', \mathscr{C}(X', X))'$.*

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στο ζεύγος (X', X'') μπορούμε να ορίσουμε μια ακόμα ασθενή τοπολογία στον X', την $\sigma(X', X'')$. Σχετικά ισχύει:

$$\sigma(X', X) \subset \sigma(X', X'')$$

Ο χώρος X μπορεί να θεωρηθεί υποσύνολο του X'' υπό την έννοια της απεικόνισης $\Phi : X \mapsto X''$ που ορίζεται από την

$$[\Phi(x)](y) = y(x), y \in X'$$

Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική αλλά **όχι πάντα** συνεχής για τις τοπολογίες ξ και $\mathscr{C}(X'', X')$. Όταν η Φ είναι τοπολογικός ισομορφισμός του X **επί** τον X'' τότε ο χώρος X ονομάζεται **ανακλαστικός**.
Όταν ο X είναι **χώρος με norm** $\|\cdot\|$ και την αντίστοιχη παραγόμενη τοπολογία $\xi \equiv \tau(\|\cdot\|)$ τότε ισχύουν επιπλέον τα ακόλουθα:

1. $\tau(X, X') = \xi$

2. $\mathscr{C}(X', X) = \xi' \equiv \tau(\|\cdot\|')$
   όπου η norm $\|\cdot\|'$ του X' ορίζεται κατά τον γνωστό τρόπο

   $$\|x'\|' = sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$$

3. Η απεικόνιση Φ είναι τοπολογικός ισομορφισμός του X επί τον $\Phi(X)$ που είναι κλειστός υπόχωρος του $(X'', \mathscr{C}(X'', X'))$. Έτσι αν $\Phi(X) = X''$ ο χώρος X είναι ανακλαστικός.

Παρατήρηση 4.1.2. Τα συμπεράσματα (1),(2) ισχύουν ακόμα και όταν ο χώρος X με την αρχική τοπολογία ξ είναι Frechet, δηλαδή τοπικά κυρτός, μετρικοποιήσιμος (metrizable) και πλήρης.

4.2 σ-άλγεβρες και κυλινδρικές σ-άλγεβρες σε τοπ. διαν. χώρους

Οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια αναπτύσσονται και αποδεικνύονται για **πραγματικούς διαν. χώρους**. Για μιγαδικούς η ανάπτυξη είναι ταυτόσημη.

4.2.1 Μετρήσιμοι διανυσματικοί χώροι

Αν X είναι διανυσματικός χώρος και $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του τότε υπάρχει ένα ζήτημα συμβιβαστότητας μεταξύ της διανυσματικής δομής και της μετρήσιμης δομής που εισάγει η σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω διαν. χώρος X και σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$ του X. Το ζεύγος $(X,\mathscr{A})$ λέγεται **μετρήσιμος διανυσματικός χώρος** όταν και μόνο όταν οι απεικονίσεις $(x,y)\mapsto x+y, x\mapsto -x$ και $(a,x)\mapsto ax$ είναι αντίστοιχα $\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}-\mathscr{A}, \mathscr{A}-\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}^1\otimes\mathscr{A}-\mathscr{A}$ μετρήσιμες.*

Είναι μάλλον μη αναμενόμενο ότι αν ο διαν. χώρος X είναι τοπολογικός και $\mathscr{B}(X)$ η σ-άλγεβρα Borel που παράγεται από την τοπολογία του τότε η απεικόνιση $(x,y)\mapsto x+y$ είναι συνεχής και άρα $\mathscr{B}(X\times X)-\mathscr{B}(X)$ μετρήσιμη όχι όμως κατ ανάγκη $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)-\mathscr{B}(X)$ μετρήσιμη όπως απαιτεί ο ορισμός και κατά την Πρόταση 2.9.2. είναι $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{B}(X\times X)$. Ισχύει εν τούτοις η παρακάτω:

Πρόταση 4.2.2. *Έστω **διαχωρίσιμος μετρικός** τοπολογικός διανυσματικός χώρος X και $\mathscr{B}(X)$ η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του. Τότε ο $(X,\mathscr{B}(X))$ είναι μετρήσιμος διαν. χώρος.*

Απόδειξη. Η τοπολογία του X έχει αριθμήσιμη βάση και συνεπώς (Πρόταση 2.9.2.) $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)=\mathscr{B}(X\times Y)$ και $\mathscr{B}^1\otimes\mathscr{B}(X)=\mathscr{B}(\mathbb{R}\times X)$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι οι απεικονίσεις $(x,y)\mapsto x+y,(a,x)\mapsto ax$ είναι συνεχείς όπως εξάλλου και η $x\mapsto -x$.

□

Παρατήρηση 4.2.3. Όμως οι απεικονίσεις "ματαφορά" $x\mapsto x+b$ και 'ομοιοθεσία" $x\mapsto\lambda x$ είναι προφανώς $\mathscr{B}(X)-\mathscr{B}(X)$ μετρήσιμες.

Σημείωση: Αποδεικνύεται (δες [16]) ότι αν X είναι τοπ. χώρος Hausdorff με $cardX>c$ τότε το κλειστό σύνολο $\Delta=\{(x,y)\in X\times X : x=y\}$ **δεν** ανήκει στην $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$. Έτσι αν X είναι τοπολ. διαν. χώρος με $cardX>c$ τότε $(X,\mathscr{B}(X))$ **δεν** είναι μετρήσιμος διαν. χώρος διότι αν ήταν τέτοιος η συνάρτηση $f(x,y)=x-y$ θα ήταν $\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)-\mathscr{B}(X)$ μετρήσιμη. Όμως $f^{-1}(\{0\})=\Delta\notin\mathscr{B}(X)\otimes\mathscr{B}(X)$.

4.2.2 κυλινδρικές σ-άλγεβρες σε τοπ. διαν. χώρους

Σε κάθε τοπολογία που ορίζεται σε έναν διαν. χώρο X αντιστοιχεί και μια σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του X. Προκειμένου να υποδείξουμε την τοπολογία της οποίας τα ανοικτά παράγουν μια σ-άλγεβρα Borel θα υιοθετήσουμε τον συμβολισμό $\mathscr{B}(X,\tau)$ τον οποίο θα ερμηνεύουμε με τον προφανή τρόπο: $\mathscr{B}(X,\tau)$ είναι η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του X που παράγεται από τα ανοικτά της τοπολογίας τ. Οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων σ-αλγεβρών είναι άμεση συνέπεια της σχέσης μεταθύ τοπολογιών. Έτσι αν ξ είναι η τοπολογία ενός τοπικά κυρτού τοπολ. διαν. χώρου X θα ισχύει π.χ.:

$$\mathscr{B}(X,\sigma(X,X'))\subset\mathscr{B}(X,\xi)\subset\mathscr{B}(X,\tau(X,X'))$$

Εν τούτοις όταν **δεν** υπάρχει κίνδυνος σύγχισης θα γράφουμε απλά $\mathscr{B}$ ή $\mathscr{B}(X)$ ή $\mathscr{B}_X$.
Τώρα θα εισάγουμε ένα καινούριο είδος σ-αλγεβρών τις λεγόμενες **κυλινδρικές**

σ-άλγεβρες. Θα εισάγουμε την έννοια γενικά σε ένα αφηρημένο χώρο X και αργότερα θα εξειδικεύσουμε.

Έστω λοιπόν $X \neq \emptyset$ και μη κενό σύνολο πραγματικών συναρτήσεων $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$. Ας είναι τώρα $\Lambda = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$.
Για τυχόν $f = (f_1, ...f_m) \in \Lambda$ θέτουμε $\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^m\}$. Όπως είναι γνωστό η $\mathscr{A}_f$ είναι σ-άλγεβρα και μάλιστα $\mathscr{A}_f = \sigma(\{f^{-1}(A_1 \times ... \times A_m) : A_i \in \mathscr{B}^1\})$. Αν τώρα $f = (f_1, ..., f_m) \in \Lambda$ και $g = (g_1, ..., g_n) \in \Lambda$ και θεωρήσουμε τη διάταξη $h = (f_1, ..., f_m, g_1, ...g_n)$ τότε $h \in \Lambda$ και για τυχόν $B \in \mathscr{B}^m$ είναι $f^{-1}(B) = h^{-1}(B \times \mathbb{R}^n)$ και συνεπώς $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$. Όμοια είναι $\mathscr{A}_g \subset \mathscr{A}_h$ και συνεπώς η οικογένεια σ-αλγεβρών $\{\mathscr{A}_f, f \in \Lambda\}$ είναι **δεξιά διευθυνόμενη** (δηλαδή για $f, g \in \Lambda$ υπάρχει $h \in \Lambda$ με $\mathscr{A}_f \cup \mathscr{A}_g \subset \mathscr{A}_h$). Αυτό εξασφαλίζει ότι η $\bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f$ είναι άλγεβρα. Πρόκειται ακριβώς για την **άλγεβρα κυλίνδρων** του X την παραγόμενη από το $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$.

Ορισμός 4.2.4. *Έστω $X \neq \emptyset$ και μη κενό $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$. Η άλγεβρα $\bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f$ ονομάζεται* **άλγεβρα των κυλίνδρων** *(ή κυλινδρική) παραγόμενη από την Γ και σημειώνεται $C(X, \Gamma) = \bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f$. Ακόμα η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X η παραγόμενη από την $C(X, \Gamma)$ ονομάζεται* **σ-άλγεβρα κυλίνδρων** *(ή κυλινδρική)* **παραγόμενη από την Γ** *και σημειώνεται $\hat{C}(X, \Gamma)$. Είναι δηλαδή $\hat{C}(X, \Gamma) = \sigma(C(X, \Gamma))$.*

Στα πλαίσια των συμβολισμών αυτών και για τυχόν $f = (f_1, ..., f_m) \in \Lambda$ μπορούμε να γράψουμε $\hat{C}(X, f_1, ..., f_m) = C(X, f_1, ..., f_m) = \mathscr{A}_f$.

Άλλοι τρόποι παραγωγής και γνωρίσματα της $\hat{C}(X, \Gamma)$ φαίνονται στις παρακάτω ασκήσεις.

Άσκηση 35. Ορίζουμε $\hat{C}_1(X, \Gamma) \equiv \sigma(\Gamma) \equiv \sigma(\{\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma, B \in \mathscr{B}^1\})$. Δείξτε ότι $\hat{C}_1(X, \Gamma) = \hat{C}(X, \Gamma)$.

Υπόδειξη: Προφανώς $\hat{C}_1 \subset \hat{C}$. Αρκεί τώρα για τυχόν $f = (f_1, ...f_m) \in \Lambda$ για να δείξουμε $\mathscr{A}_f \subset \hat{C}_1$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.5. $\mathscr{A}_f = \sigma(\{f^{-1}(A_1 \times ... \times A_m) : A_i \in \mathscr{B}^1\})$. Όμως $f^{-1}(A_1 \times ... \times A_m) = \bigcap\limits_{k=1}^{m} f_k^{-1}(A_k) \in \hat{C}_1$.

Άσκηση 36. Έστω $(\Omega, \mathscr{F})$ μετρήσιμος χώρος και $F : \Omega \mapsto X$. Αν $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ δείξτε ότι η F είναι $\mathscr{F} - \hat{C}(X, \Gamma)$ μετρήσιμη όταν και μόνο όταν η $\gamma \circ F$ είναι $\mathscr{F} - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη για κάθε $\gamma \in \Gamma$.

Υπόδειξη: Επικαλεστείτε την Άσκηση 35 και την Πρόταση 1.3.2.

Άσκηση 37. Έστω $X \neq \emptyset$ και μη κενό $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$. Για τυχόν $x \in X$ ορίζουμε $\phi_x : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$ με την $\phi_x(\gamma) = \gamma(x)$ και κατόπιν την $\Phi : X \mapsto \mathbb{R}^\Gamma$ με την $\Phi(x) = \phi_x$. Ο χώρος $\mathbb{R}^\Gamma$ εφοδιάζεται με την σ-άλγεβρα $\bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{B}^1 \equiv \sigma(\pi_\gamma, \gamma \in \Gamma) \equiv \sigma(\{\pi_\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma, B \in \mathscr{B}^1\})$ όπου $\pi_\gamma : \mathbb{R}^\Gamma \mapsto \mathbb{R}$ η γ-προβολή $\pi_\gamma(h) = h(\gamma)$. Δείξτε ότι:

1. η Φ είναι $\hat{C}(X, \Gamma) - \bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη.

2. $\hat{C}(X, \Gamma) = \{\Phi^{-1}(A) : A \in \bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{B}^1\}$

Υπόδειξη:

1. Για τυχόν $\pi_\gamma^{-1}(B)$ με $\gamma \in \Gamma$ και $B \in \mathscr{B}^1$ είναι $\Phi^{-1}(\pi_\gamma^{-1}(B)) = \{x \in X : (\pi_\gamma \circ \Phi)(x) \in B\} = \{x \in X : \pi_\gamma(\phi_x) \in B\} = \{x \in X : \phi_x(\gamma) \in B\} = \gamma^{-1}(B) \in \hat{C}(X, \Gamma)$.
2. Από το (1) και άσκηση 35 έχουμε ότι $\{\Phi^{-1}(A) : A \in \bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{B}^1\} \subset \hat{C}(X, \Gamma)$. Εξάλλου για τυχόν $\gamma^{-1}(B)$ με $\gamma \in \Gamma$ και $B \in \mathscr{B}^1$ είναι $\gamma = \pi_\gamma \circ \Phi$ και άρα $\gamma^{-1}(B) = \Phi^{-1}(A)$ όπου $A = \pi_\gamma^{-1}(B) \in \bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{B}^1$.

Άσκηση 38. Αν $f = (f_1, ..., f_m) \in \Lambda$ και $g = (f_{\sigma(1)}, ..., f_{\sigma(m)}) \in \Lambda$ όπου σ μετάθεση του $\{1, ..., m\}$ τότε $\mathscr{A}_f = \mathscr{A}_g$.

Υπόδειξη: Ορίζουμε $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ με την $\phi(u_1, ..., u_m) = (u_{\sigma(1)}, ..., u_{\sigma(m)})$. Τότε εύκολα έχουμε ότι $\phi \circ f = g$.

Αν ο χώρος X είναι διανυσματικός, υπό ποιές προϋποθέσεις στο Γ είναι μετρήσιμος διανυσματικός χώρος ο $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$;
Θετικό είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.2.5. *Έστω X διαν. χώρος και ένα μη κενό σύνολο* ***γραμμικών*** *συναρτησοειδών Γ. Τότε ο $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$ είναι μετρήσιμος διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Για τυχόν $\gamma \in \Gamma$ ορίζουμε $\Psi_\gamma : X \times X \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με την $\Psi_\gamma(x, y) = (\gamma(x), \gamma(y))$. Η Ψ_γ είναι $\hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma) - \mathscr{B}^2$ μετρήσιμη αφού για τυχόντα $A, B \in \mathscr{B}^1$ έχουμε $\Psi_\gamma^{-1}(A \times B) = \gamma^{-1}(A) \times \gamma^{-1}(B) \in \hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma)$. Ορίζουμε τώρα $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με την $\phi(x, y) = x + y$. Η φ είναι προφανώς $\mathscr{B}^2 - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη και συνεπώς η σύνθεση $\phi \circ \Psi_\gamma$ είναι $\hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma) - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη. Αν τώρα $\Phi : X \times X \mapsto X$ είναι η οριζόμενη ως $\Phi(x, y) = x + y$ τότε άμεσα επαληθεύεται ότι $\gamma \circ \Phi = \phi \circ \Psi_\gamma$ και συνεπώς $\Phi^{-1}(\gamma^{-1}(B)) = (\gamma \circ \Phi)^{-1}(B) = (\phi \circ \Psi_\gamma)^{-1}(B) \in \hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma)$ λόγω μετρησιμότητας της $\phi \circ \Psi_\gamma$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι $\hat{C}(X, \Gamma) = \sigma(\{\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma, B \in \mathscr{B}^1\})$.(Δες Άσκηση 35) Όμοια ενεργούμε και για την απεικόνιση $\Phi_1 : \mathbb{R} \times X \mapsto X : \Phi_1(a, x) = ax$.

□

Παρατήρηση 4.2.6. Από την παραπάνω Πρόταση προκύπτει ότι για τυχόντα $b \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ οι απεικονίσεις $x \mapsto x + b, x \mapsto \lambda x$ είναι $\hat{C}(X, \Gamma) - \hat{C}(X, \Gamma)$ μετρήσιμες.

Έστω τώρα X τοπικά κυρτός τοπ. διαν. χώρος με τοπολογία ξ. Έστω $X' = (X,\xi)'$ ο δυϊκός του. Τότε όπως είναι γνωστό $\sigma(X,X') \subset \xi$ και άρα $\mathscr{B}(X,\sigma(X,X')) \subset \mathscr{B}(X,\xi) \equiv \mathscr{B}(X)$. Εξάλλου όπως φαίνεται από την Άσκηση 35, η σ-άλγεβρα $\hat{C}(X,X')$ είναι η ελάχιστη που καθιστά μετρήσιμες τις $x' \in X'$. Συνεπώς $\hat{C}(X,X') \subset \mathscr{B}(X,\sigma(X,X')) \subset \mathscr{B}(X)$. Ισότητα δεν ισχύει εν γένει. Όμως:

Θεώρημα 4.2.7. *(E. Mourier)*
Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με norm. Τότε $\hat{C}(X,X') = \mathscr{B}(X)$.

Απόδειξη. Έστω $\|\cdot\|$ η norm του X και $\|\cdot\|'$ η norm του X'. Έστω $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό στον X. Από το θεώρημα Hahn-Banach προκύπτει ότι υπάρχει $\{x'_n, n \in \mathbb{N}\} \subset X'$ με $\|x'_n\|' = 1$ και $|<x_n, x'_n>| = \|x_n\|$. Θα δείξουμε ότι:

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |<x, x'_n>| \text{ για κάθε } x \in X.$$

Από την $\|x'_n\|' = \sup\limits_{y\neq 0} \frac{|<y,x'_n>|}{\|y\|} = 1$ προκύπτει ότι

$$|<y, x'_n>| \leq \|y\| \quad \text{για κάθε} \quad y \in X \tag{1}$$

Τώρα για τυχόν $x \in X$ και τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει x_m:

$$\|x - x_m\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

Από τις ιδιότητες της norm και τις ιδιότητες της $\{x'_n, n \in \mathbb{N}\}$ έχουμε:

$$\|x\| - \frac{\epsilon}{2} < \|x_m\| = |<x_m, x'_m>| \leq |<x, x'_m>| + |<x_m - x, x'_m>|$$

και επικαλούμενοι τις (1),(2):

$$\|x\| - \frac{\epsilon}{2} < |<x, x'_m>| + \frac{\epsilon}{2}$$

και πάλι την (1) οπότε:

$$\|x\| - \epsilon < |<x, x'_m>| \leq \|x\|$$

Συνεπώς $\|x\| = \sup\limits_n |<x, x'_n>|, x \in X$ και άρα

$$B_X \equiv \{x \in X : \|x\| < 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |<x, x'_n>| < 1\}$$

Όμως $\{x \in X : |<x, x'_n>| < 1\} \in \hat{C}(X,X')$ και άρα $B_X \in \hat{C}(X,X')$.
Επικαλούμενοι τώρα την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι για κάθε $y \in X$ και κάθε $a > 0$ το σύνολο $y + aB_X \in \hat{C}(X,X')$ και συνεπώς κάθε "μπάλα" $B(y,r) = \{x \in X : \|x - y\| < r\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $\hat{C}(X,X')$. Λόγω διαχωρισιμότητας του X κάθε ανοικτό του X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση από τέτοιες "μπάλες" και συνεπώς κάθε ανοικτό του X ανήκει στην $\hat{C}(X,X')$. Ώστε $\mathscr{B}(X) \subset C(X,X')$. Συνδυάζοντας με την ήδη γνωστή $C(X,X') \subset \mathscr{B}(X)$ παίρνουμε το αποτέλεσμα.

□

Ένα συναφές αποτέλεσμα παρουσιάζεται στη συνέχεια. Για την απόδειξή του (που βασίζεται στο θεώρημα Kuratowski) παραπέμπουμε στο [16].

Θεώρημα 4.2.8. *Έστω X τοπολογικός πολωνικός χώρος και Γ μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού X. Αν η οικογένεια Γ διαχωρίζει τα σημεία του X τότε ισχύει:*

$$\hat{C}(X,\Gamma) = \mathscr{B}(X)$$

Άσκηση 39. Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και $\Gamma \subset X'$ που διαχωρίζει τα σημεία του X. Τότε $\hat{C}(X,\Gamma) = \hat{C}(X,X')$.

Υπόδειξη: Έστω $E = \{x' \in X' : x'$ είναι $\hat{C}(X,\Gamma) - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη$\}$. Προφανώς $E \supset \Gamma$ και $\hat{C}(X,\Gamma) = \hat{C}(X,E)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $E = X'$. Πράγματι αν E γνήσιο $\subset X'$ και επειδή ο E είναι κλειστός υπόχωρος του X' (εύκολο) τότε ο $E^{\perp} \equiv \{x'' \in X'' :< x', x'' >= 0 \ \forall \ x' \in E\} \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει $x_0'' \in X'' \setminus \{0\}$ με $< x', x_0'' >= 0$ για κάθε $x' \in E$. Αν τώρα $\Phi : X \mapsto X''$ είναι η κανονική απεικόνιση $\Phi(x)(x') =< x, x' >$ λόγω ανακλαστικότητας του X θα είναι $\Phi(X) = X''$ και άρα υπάρχει $x_0 \in X \setminus \{0\}$ με $\Phi(x_0) = x_0''$ και άρα $< x_0, x' >= 0$ για κάθε $x' \in E \supset \Gamma$ - άτοπο αφού $x_0 \neq 0$ και η Γ διαχωρίζουσα.

Άσκηση 40. Έστω X, Y τοπικά κυρτοί τοπολ. διαν. χώροι και η γραμμική συνεχής $T : X \mapsto Y$. Δείξτε ότι η T είναι $\hat{C}(X,X') - \hat{C}(Y,Y')$ μετρήσιμη.

Υπόδειξη: $y' \circ T \in X'$ για κάθε $y' \in Y'$ άρα $C(X,X') - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη. Επικαλεστείτε τώρα την Άσκηση 36.

Θα δούμε τώρα τις επιπλέον δυνατότητες περιγραφής και παραλλαγής της σ-άλγεβρας $\hat{C}(X,\Gamma)$ όταν X, Γ είναι διαν. χώροι π.χ. X τοπικά κυρτός τοπολ. διαν. χώρος και $\Gamma = X'$. Είναι σκόπιμο να υπενθυμίσουμε ότι για τυχόν $f = (f_1, ..., f_k) \in \Lambda \equiv \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$ γράφουμε:

$$\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^k\}$$

Όπως θα δούμε η σ-άλγεβρα $\hat{C}(X,\Gamma)$ μπορεί να προκύψει θεωρώντας $f = (f_1, ..., f_k) \in \Lambda$ με $f_1, ..., f_k$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόταση 4.2.9. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ διαν. χώρος. Έστω $L = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma$ γραμμικά ανεξάρτητα$\}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\hat{C}(X,\Gamma) = \sigma(\bigcup\limits_{f \in L} \mathscr{A}_f)$

2. *Για τυχόντα $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $g = (g_1, ..., g_r) \in L$ υπάρχει $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ με $\mathscr{A}_f \cup \mathscr{A}_g \subset \mathscr{A}_h$. Μάλιστα υπάρχουν γραμμικές $\phi_1 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ και $\phi_2 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^r$ εις τρόπον ώστε να ισχύει :*

$$f = \phi_1 \circ h \quad \textit{και} \quad g = \phi_2 \circ h$$

3. $\bigcup\limits_{f\in L} \mathscr{A}_f = \bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f = C(X,\Gamma)$.

Απόδειξη.

1. Είναι προφανές ότι $\{\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}, B \in \mathscr{B}^1\} \subset \bigcup\limits_{f\in L} \mathscr{A}_f \subset \bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f$ και ανακαλώντας συμβολισμούς και αποτελέσματα της άσκησης 35 $\hat{C}_1(X,\Gamma\setminus\{0\}) \subset \sigma(\bigcup\limits_{f\in L} \mathscr{A}_f) \subset \sigma(\bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f)$. Όμως εξ ορισμού $\sigma(\bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f) = \hat{C}(X,\Gamma)$ και από την άλλη $\hat{C}_1(X,\Gamma\setminus\{0\}) = \hat{C}_1(X,\Gamma) = \hat{C}(X,\Gamma)$.

2. Έστω E ο υπόχωρος ο παραγόμενος από τα $\{f_1,...,f_n,g_1,...,g_r\}$ και μια βάση του $\{h_1,...,h_m\} \subset E$. Τότε

$$f_k = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell^k h_\ell \quad , \quad k = 1,...n$$

Αν τώρα $h = (h_1,...,h_m)$ και $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ η οριζόμενη από την $\phi(u_1,...,u_m) = [a_\ell^k](u_1,...,u_m)^\top$ τότε $h \in L$ και $f = \phi \circ h$
οπότε για τυχόν $B \in \mathscr{B}^n$ έχουμε $f^{-1}(B) = h^{-1}(\phi^{-1}(B))$ με $\phi^{-1}(B) \in \mathscr{B}^m$ και άρα $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$. Όμοια για την g.

3. Έστω F μια βάση του χώρου Γ. Τότε για τυχόν $f = (f_1,...,f_n) \in \Lambda$ θα ισχύει

$$f_k = \sum_{\ell=1}^{m_k} b_\ell^k g_\ell^k \quad , \quad k = 1,...,n$$

όπου $\{g_1^k,...,g_{m_k}^k\} \subset F$ γραμμικά ανεξάρτητα $(k = 1,...,n)$.
Αν E ο υπόχωρος ο παραγόμενος από τα $\{g_\ell^k : \ell = 1,...,m_k, k = 1,...,n\}$ τότε $f_k \in E, k = 1,...,n$ και συνεπώς αν $\{h_1,...,h_m\}$ βάση του E τότε

$$f_k = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell^k h_\ell \quad , \quad k = 1,...,n$$

Αν τώρα $h = (h_1,...,h_m)$ και $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ οριζόμενη από την $\phi(u_1,...,u_m) = [a_\ell^k](u_1,...,u_m)^\top$ τότε $f = \phi \circ h$ και εύκολα $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$ με $h \in L$.

$\square$

Παρατήρηση 4.2.10. Τα παραπάνω ισχύουν ασφαλώς όταν $\Gamma = X'$ όπου X' ο δυϊκός ενός τοπικά κυρτού τοπολ. διαν. χώρου X με τοπολογία ξ, δηλαδή $X' = (X,\xi)'$. Όπως ήδη αναφέραμε ισχύουν :

$$\hat{C}(X,X') \subset \mathscr{B}(X,\sigma(X,X')) \subset \mathscr{B}(X)$$

όπου $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(X,\xi)$.

4.3 Κυλινδρικές σ-άλγεβρες στον δυϊκό χώρο

Κυλινδρικές άλγεβρες και σ-άλγεβρες ορίζονται και στον δυϊκό $X' = (X, \xi)'$ ενός τοπικά κυρτού τοπολ. διαν. χώρου με τοπολογία ξ. Ιδιαίτερα:
$I = \{i \subset X : i \text{ πεπερασμένο}\}$ και για $i = \{x_1, ..., x_n\} \in I$
$\mathscr{A}_i = \{g_i^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^n\}$ όπου $g_i : X' \mapsto \mathbb{R}^n$ ορίζεται από την $g_i(x') = (< x_1, x' >, ..., < x_n, x' >)$. Ορίζουμε $C(X', X) = \bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{A}_i$ και $\hat{C}(X', X) = \sigma(\bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{A}_i)$.
Η $\hat{C}(X', X)$ ονομάζεται **σ-άλγεβρα κυλίνδρων** του X' και απλώς **άλγεβρα κυλίνδρων** (είναι) η $C(X', X)$. Αν απεικονίσουμε το X στο υποσύνολο $\Phi(X) \subset X''$ μέσω της $\Phi : X \mapsto X''$ που ορίζεται από την

$$\Phi(x)(\ell) = \ell(x) \quad , \quad \ell \in X'$$

τότε προκύπτει εύκολα ότι

$$\hat{C}(X', X) \subset \hat{C}(X', X'') \subset \mathscr{B}(X', \mathscr{C}(X', X))$$

όπου $\mathscr{C}(X', X)$ η ισχυρή τοπολογία του X'.
Για το νόημα της $\hat{C}(X', X'')$ δεν χρειάζεται να πούμε παρά ότι πρόκειται για την **σ-άλγεβρα κυλίνδρων** του X' όταν $\Gamma = X''$. Το θεώρημα της E. Mourier για τον δυϊκό X' έχει όπως αναμένεται ως ακολούθως

Θεώρημα 4.3.1. *Αν X είναι χώρος με norm και ο X' είναι διαχωρίσιμος τότε $\hat{C}(X', X) = \mathscr{B}(X')$. (Η τοπολογία του X' είναι η οριζόμενη από την $\|x'\| = \sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$).*

4.4 Μέτρα και κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας σε τ.δ.χ. Θεώρημα Prohorov

Η έννοια του κανονικού μέτρου αναφέρεται σε μια τοπολογία του χώρου στου οποίου τα υποσύνολα ορίζεται. Έτσι όταν σε ένα χώρο ορίζονται περισσότερες της μιας τοπολογίες είναι απαραίτητο να προσδιορίζεται σαφώς η τοπολογία στην οποία αναφέρεται η κανονικότητά του. Προκειμένου να εξυπηρετηθεί αυτή η ανάγκη θα χρησιμοποιούμε (όταν είναι απαραίτητο) την ορολογία **ξ-κανονικό μέτρο μ** και θα εννοούμε ότι το μέτρο μ είναι κανονικό μέτρο στη σ-άλγεβρα Borel που παράγουν τα ανοικτά της τοπολογίας ξ. Έτσι αν π.χ. X είναι τοπικά κυρτός τ.δ.χ. με τοπολογία ξ τότε $\mathscr{C}(X, X')$-κανονικό μέτρο μ είναι ένα μέτρο που ορίζεται στη σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}(X, \mathscr{C}(X, X'))$ και είναι κανονικό. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχισης ειδικά η σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}(X, \xi)$ θα γράφεται $\mathscr{B}(X)$. Σχετικό με τα παραπάνω είναι το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 4.4.1. *Έστω τοπολογίες τ_1, τ_2 στον χώρο X με σύνολο ανοικτών $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ (η τ_2 είναι **λεπτότερη** της τ_1). Τότε ένα τ_2-κανονικό πεπερασμένο μέτρο μ είναι τ_1-κανονικό.*

Απόδειξη. Καταρχήν $\mathscr{B}_1 \equiv \sigma(\mathcal{T}_1) \subset \sigma(\mathcal{T}_2) \equiv \mathscr{B}_2$ και συνεπώς το μέτρο μ ορίζεται στην $\mathscr{B}_1$. Αν τώρα $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ είναι τα σύνολα συμπαγών για τις τοπολογίες τ_1, τ_2 αντίστοιχα τότε διαπιστώνεται άμεσα ότι $\mathscr{K}_2 \subset \mathscr{K}_1$ οπότε για τυχόν $A \in \mathscr{B}_1$ θα είναι

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_2, K \subset A\} \\ &\leq \sup\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_1, K \subset A\} \\ &\leq \mu(A)\end{aligned}$$

Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε την Πρόταση 2.2.4.

□

Παρατήρηση 4.4.2. Η ίδια Πρόταση μάς επιτρέπει μια επέκταση του προηγούμενου συμπεράσματος σε μη-πεπερασμένα μέτρα. Αρκεί να είναι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ με U_n τ_1-ανοικτά και $\mu(U_n) < \infty$.

Η κατασκευή κανονικών μέτρων σε τ.δ.χ. μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση των λεγόμενων κυλινδρικών "μέτρων" ο ορισμός των οποίων ακολουθεί. Για να γίνει κατανοητός υπενθυμίζουμε συμβολισμούς και αποτελέσματα της Πρότασης 4.2.9. Αν X ειναι διανυσματικός χώρος και $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ διαν. χώρος τότε γράφουμε:

$$\Lambda = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$$

και

$$L = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma \text{ γραμμικά ανεξάρτητα}\}$$

για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ είναι $\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^n\}$, $C(X, \Gamma) \equiv \bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$ και $\hat{C}(X, \Gamma) = \sigma(C(X, \Gamma))$.

Ορισμός 4.4.3. *Έστω X διαν. χώρος και $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ διαν. χώρος. Ονομάζεται* ***κυλινδρικό μέτρο*** *πιθανότητας μ στον X μια συνολοσυνάρτηση $\mu : C(X, \Gamma) \mapsto [0, 1]$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. *είναι απλά προσθετική*
2. *$\mu(X) = 1$*
3. *Ο περιορισμός της σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_f, f \in \Lambda$ είναι μέτρο*

Παρατήρηση 4.4.4. Η απαίτηση (1) περιττεύει αφού η (3) σε συνδυασμό με την (2) της Πρότασης 4.2.9. την εξασφαλίζει. Είναι φανερό επίσης ότι ένα κυλινδρικό μέτρο **δεν** είναι μέτρο αφού **δεν** απαιτείται να είναι σ-προσθετική στην άλγεβρα $C(X, \Gamma)$.

Θα παραθέσουμε τώρα μια μέθοδο κατασκευής κυλινδρικών μέτρων πιθανότητας "ξεκινώντας" από μέτρα πιθανότητας σε πεπερασμένης διάστασης διαν. χώρους. Προηγουμένως όμως είναι απαραίτητο το:

Λήμμα 4.4.5. *Έστω διανυσματικός χώρος X και διανυσματικός χώρος $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ του οποίου τα στοιχεία είναι γραμμικά συναρτησοειδή ($\Gamma \subset X^*$- ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Έστω γραμμικά ανεξάρτητα $\{f_1, ..., f_n\} \subset \Gamma$ και $f = (f_1, ..., f_n)$. Τότε η απεικόνιση $f : X \mapsto \mathbb{R}^n$ είναι 'επί".*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Είναι γνωστό (Robertson & Robertson: Top. Vector Spaces, σελ. 33) ότι υπάρχουν $a_1, ..., a_n$ στον X εις τρόπον ώστε $f_i(a_i) = 1$ και $f_i(a_j) = 0$ για κάθε $j \neq i \in (i = 1, ..., n)$. Θεωρούμε το $x = y_1 a_1 + ... + y_n a_n$. Τότε $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(a_j) = y_i$ και άρα $f(x) = y$.

□

Θεώρημα 4.4.6. *Έστω διαν. χώρος X και διαν. χώρος γραμμικών συναρτησοειδών $\Gamma \subset X^*$ (X^* ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Υποθέτουμε ότι για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας μ_f στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω* ***συνθήκη συμβιβαστότητας****:*

> *Για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ με $f = \phi \circ h$ όπου $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$* ***γραμμική*** *ισχύει:*
>
> $$\mu_h(\phi^{-1}(B)) = \mu_f(B) \quad , \quad B \in \mathscr{B}^n \qquad (\Sigma)$$

Τότε υπάρχει μοναδική συνολοσυνάρτηση $\mu : \bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f \mapsto [0, 1]$ με $\mu(X) = 1$ και σ-προσθετική όταν περιορίζεται στις σ-άλγεβρες $\mathscr{A}_f, f \in L$ εις τρόπον ώστε να ισχύει η:

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B) \text{ για κάθε } f = (f_1, ..., f_n) \in L \quad , \quad B \in \mathscr{B}^n \qquad \text{(A)}$$

Επιπλέον η μ ειναι σ-προσθετική σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_f, f \in \Lambda$ είναι δηλαδή ένα κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στην $C(X, \Gamma)$.

Απόδειξη.

Ορίζουμε $\quad \mu : C(X, \Gamma) \equiv \bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f \mapsto [0, 1]$
ως εξής $\mu(A) = \mu_f(B)$ αν $A = f^{-1}(B) \in \mathscr{A}_f$

Καταρχήν θα δείξουμε ότι η μ είναι καλά ορισμένη.
Έστω ότι $A = f^{-1}(B_1) = g^{-1}(B_2)$ όπου $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $g = (g_1, ..., g_r) \in L, B_1 \in \mathscr{B}^n$ και $B_2 \in \mathscr{B}^r$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.9. υπάρχει $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ με $f = \phi_1 \circ h$ και $g = \phi_2 \circ h$ όπου $\phi_1 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ και $\phi_2 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^r$ γραμμικές και συνεπώς:

$$A = h^{-1}(\phi_1^{-1}(B_1)) = h^{-1}(\phi_2^{-1}(B_2))$$

Άρα $h^{-1}(\phi_1^{-1}(B_1) \setminus \phi_2^{-1}(B_2)) = \emptyset$ και επειδή κατά το προηγηθέν λήμμα η h είναι 'επί" θα ισχύει

$$\phi_1^{-1}(B_1) \subset \phi_2^{-1}(B_2)$$

Η συμμετρία του τεχνάσματος συνεπάγεται και τον αντίθετο εγκλεισμό και συνεπώς

$$\phi_1^{-1}(B_1) = \phi_2^{-1}(B_2) \tag{1}$$

Εξάλλου από τη συνθήκη συμβιβαστότητας (Σ) έχουμε:

$$\mu_f(B_1) = \mu_h(\phi_1^{-1}(B_1)) \quad \text{και} \quad \mu_g(B_2) = \mu_h(\phi_2^{-1}(B_2))$$

και άρα από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\mu_f(B_1) = \mu_g(B_2)$.
Θα δείξουμε τώρα ότι η μ είναι σ-προσθετική στην σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_f$ για τυχόν $f \in L$. Πράγματι αν $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}_f$ είναι ξένα μεταξύ τους και $A_n = f^{-1}(B_n), B_n \in \mathscr{B}^k$ τότε $f^{-1}(B_i \cap B_j) = \emptyset$ και αφού η f είναι επί θα είναι $B_i \cap B_j = \emptyset$ για $i \neq j$. Εύκολα πλέον:

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_n A_n) &= \mu(f^{-1}(\bigcup_n B_n)) = \mu_f(\bigcup_n B_n) \\ &= \sum_n \mu_f(B_n) = \sum_n \mu(A_n) \end{aligned}$$

Η απαίτηση $\mu(X) = 1$ και η μοναδικότητα προκύπτουν άμεσα.
Απομένει ο τελευταίος ισχυρισμός.
Έστω τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$. Αν ένα τουλάχιστον $f_i \neq 0$ θεωρούμε τον υπόχωρο τον παραγόμενο από τα $\{f_1, ..., f_n\}$ και έστω $\{h_1, ..., h_m\}$ μια βάση του. Αν θέσουμε $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ τότε εύκολα έχουμε ότι $f = \phi \circ h$ όπου $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ και συνεπώς για τυχόν $B \in \mathscr{B}^n$ είναι $f^{-1}(B) = h^{-1}(\phi^{-1}(B))$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$ και άρα η συνολοσυνάρτηση μ είναι σ-προσθετική στην $\mathscr{A}_f$ με $f \in \Lambda$. Αν $f_i = 0$ για $i = 1, ..., n$ τότε η $\mathscr{A}_f = \{\emptyset, X\}$ και συμβαίνει το ίδιο. Λαμβάνοντας υπόψην ότι $C(X, \Gamma) = \bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$ (δες Πρόταση 4.2.9.) συμπεραίνουμε ότι η συνολοσυνάρτηση μ είναι κυλινδρικό μέτρο. □

Παρατήρηση 4.4.7. Ο τελευταίος ισχυρισμός αποσκοπεί στο χαρακτηρισμό της συνολοσυνάρτησης μ ως κυλινδρικό μέτρο όπως το προβλέπει ο Ορισμός 4.4.3.

Πόρισμα 4.4.8. Έστω διαν. χώρος X και διανυσματικός χώρος γραμμικών συναρτησοειδών $\Gamma \subset X^*$ (όπου X^* ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Υποθέτουμε ότι για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας μ_f στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιείται η **συνθήκη συμβιβαστότητας**:

> Για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ και $h = (h_1, ..., h_m) \in \Lambda$ με $f = \phi \circ h$ όπου $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ γραμμική ισχύει:
>
> $$\mu_h(\phi^{-1}(B)) = \mu_f(B) \quad , \quad B \in \mathscr{B}^n \tag{Σ'}$$

Τότε υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας $\mu : C(X, \Gamma) = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f \mapsto [0, 1]$ εις τρόπον ώστε να ισχύει:

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B) \text{ για κάθε } f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda \text{ και } B \in \mathscr{B}^n \tag{A$'$}$$

Απόδειξη. Καταρχήν $L \subset \Lambda$ και κατά το προηγούμενο θεώρημα τα μέτρα $\mu_f, f \in L$ ορίζουν ένα κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στην $C(X,\Gamma)$ που ικανοποιεί την (A). Απομένει να επαληθευτεί η (A'). Πράγματι για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ με ένα τουλάχιστον $f_i \neq 0$ και $B \in \mathscr{B}^n$ ισχύει κατά τα προηγηθέντα $f = \phi \circ h$ όπου $h \in L$ και συνεπώς $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(h^{-1}(\phi^{-1}(B))) = \mu_h(\phi^{-1}(B))$. Επικαλούμενοι την (Σ') έχουμε $\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B)$. Αν πάλι $f = (0, ..., 0)$ τότε από την (Σ') συνάγεται ότι $\mu_f = \delta_0$. Αλλά επίσης φανερά $\mu(f^{-1}(B)) = \delta_0$. □

Παρατήρηση 4.4.9. Από το Θεώρημα και το Πόρισμα που προηγήθηκαν προκύπτει:

Αρκούν τα μέτρα $\mu_f, f \in L$ για να προσδιοριστεί ένα κυλινδρικό μέτρο.

Ο στόχος της μελέτης των κυλινδρικών μέτρων είναι η κατασκευή κανονικών μέτρων, δηλαδή η επεκτασή τους σε κανονικά. Θέλουμε συνεπώς ένα θεώρημα Prohorov κατάλληλο για το περιβάλλον των διανυσματικών χώρων. Προηγουμένως όμως το παρακάτω:

Λήμμα 4.4.10. *Έστω X τοπικά κυρτός τοπολ. διαν. χώρος και διαν. υπόχωρος $\Gamma \subset C(X,\mathbb{R})$. Έστω μ κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στον X. Τότε ισχύει για κάθε $A \in C(X,\Gamma)$*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \in C(X,\Gamma), F \text{ κλειστό } \subset A\}$$

(η τοπολογία του X είναι δεδομένη και σ'αυτήν αναφέρεται ο $C(X,\mathbb{R})$).

Απόδειξη. Έστω $A \in C(X,\Gamma)$. Τότε υπάρχει $f \in L$ με $A \in \mathscr{A}_f$ και άρα $A = f^{-1}(B)$ με $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $B \in \mathscr{B}^n$. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας $\nu(C) = \mu(f^{-1}(C)), C \in \mathscr{B}^n$ στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$. Όμως το μέτρο ν είναι κανονικό και συνεπώς για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $E \subset \mathbb{R}^n$ με $E \subset B$ και $\nu(B \setminus E) < \epsilon$. Λόγω συνέχειας της f το σύνολο $F = f^{-1}(E)$ είναι κλειστό και επίσης ανήκει στην $C(X,\Gamma)$ (εκ του ορισμού της) και είνα υποσύνολο του $f^{-1}(B) = A$.
Έχουμε τώρα $\mu(A \setminus F) = \mu(f^{-1}(B \setminus E)) = \nu(B \setminus E) < \epsilon$.

□

Θεώρημα 4.4.11. *(Prohorov για διανυσματικούς χώρους)*
Έστω X τοπικά κυρτός τοπολ. διαν. χώρος και διαν. χώρος $\Gamma \subset C(X,\mathbb{R})$ που διαχωρίζει τα σημεία του X. Έστω κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στον χώρο X που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\begin{gathered}\text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει συμπαγές } K_\epsilon \subset X \text{ εις τρόπον ώστε} \\ \mu(A) > 1 - \epsilon \text{ για κάθε } A \in C(X,\Gamma) \text{ με } A \supset K_\epsilon\end{gathered} \tag{*}$$

Τότε η συνολοσυνάρτηση μ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε κανονικό μέτρο στον $(X, \mathscr{B}(X))$.

Απόδειξη. Διαπιστώνουμε τα παρακάτω:

- Ο χώρος X είναι πλήρως κανονικός (completely regular)

- $C(X,\Gamma) = \bigcup\limits_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f$ όπου $\Lambda = \{(f_1,...,f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$

- Η συνολοσυνάρτηση μ είναι απλά προσθετική

- $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F$ κλειστό $\subset A, F \in C(X,\Gamma)\}$

- Ισχύει η συνθήκη Prohorov (*)

Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε το Θεώρημα 2.4.8.

□

Άσκηση 41. Δείξτε ότι η συνθήκη Prohorov (*) ισοδυναμεί με την παρακάτω διατύπωση:
Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ εις τρόπον ώστε

$$v_f(f(K_\epsilon)) > 1-\epsilon \quad \text{για κάθε} \quad f = (f_1,...,f_n) \in L$$

όπου v_f το μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ που ορίζεται από την

$$v_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) \quad , \quad B \in \mathscr{B}^n.$$

Υπόδειξη: Έστω ότι ισχύει η (*). Έστω $f = (f_1,...,f_n) \in L$. Λόγω συνέχειας $f(K_\epsilon) \in \mathscr{B}^n$ και άρα $f^{-1}(f(K_\epsilon)) \in C(X,\Gamma)$. Όμως $f^{-1}(f(K_\epsilon)) \supset K_\epsilon$ και άρα $v_f(f(K_\epsilon)) = \mu(f^{-1}(f(K_\epsilon))) > 1-\epsilon$.
Αντίστροφα: Έστω $A \in C(X,\Gamma)$ με $A \supset K_\epsilon$. Όμως $A = f^{-1}(B)$ για κάποιο $f = (f_1,...,f_n) \in L$ και άρα $f(f^{-1}(B)) \supset f(K_\epsilon)$. Όμως $B \supset f(f^{-1}(B))$ και άρα $v_f(B) \geq v_f(f(K_\epsilon)) > 1-\epsilon$.Όμως $v_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(A)$.

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με μια αναφορά σε ένα γνωστό αποτέλεσμα που αποκλείει την ύπαρξη μέτρων Haar (αναλλοίωτων στη μεταφορά) σε απειροδιάστατους χώρους.

Θεώρημα 4.4.12. *(A. Weil)*
Έστω X τοπολ. διαν. χώρος Hausdorff. Αν υπάρχει κανονικό μέτρο μ στον $(X,\mathscr{B})$ που να είναι ***αναλλοίωτο*** *για την πρόσθεση (δηλ. $\mu(a+B) = \mu(B)$ για κάθε $a \in X$ και $B \in \mathscr{B}$) τότε ο τοπολ. χώρος X είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Δες [16] σελ.73 □

Πόρισμα 4.4.13. Έστω X τοπολ. διανυσματικός χώρος Hausdorff **απείρων** διαστάσεων. Τότε δεν υπάρχει κανονικό μέτρο μ στον $(X,\mathscr{B})$ που να είναι αναλλοίωτο.

Απόδειξη. Αν υπήρχε τότε ο X θα ήταν τοπικά συμπαγής και άρα πεπερασμένης διάστασης - Άτοπο. □

Κεφάλαιο 5

Χαρακτηριστικά συναρτησοειδή μέτρων πιθανότητας

5.1 Ορισμοί και ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτησοειδών

Η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως γνωστόν από την

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} d\mu(x) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ είναι **θετικά ορισμένη** στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ δηλαδή:

> Για οποιαδήποτε $t_1, ..., t_m$ στο $\mathbb{R}^n$ και οποιαδήποτε $c_1, ..., c_m$ στο $\mathbb{C}$ ισχύει:
>
> $$\sum_{k,\ell=1}^{m} c_k \bar{c}_\ell \psi(t_k - t_\ell) \geq 0$$

Άμεσα προκύπτει ακόμα ότι $\psi(0) = 1$ και ότι η $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν κατά μοναδικό τρόπο τη σχέση της ψ και του μ.

Θεώρημα 5.1.1. *(Bochner)*
Οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:

i *Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένη, συνεχής με $\psi(0) = 1$*

ii *Υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ με χαρακτηριστική συνάρτηση την ψ.*

Απόδειξη. Δες [9] $\square$

Οι επόμενες γραμμές αφορούν τη γενίκευση και μελέτη αυτών των εννοιών σε τοπ. διαν. χώρους οποιασδήποτε διάστασης.

Ορισμός 5.1.2. *Έστω Y μια προσθετική ομάδα (π.χ. διαν. χώρος). Μια συνάρτηση $\mathcal{X} : Y \mapsto \mathbb{C}$ λέγεται **θετικά ορισμένη** όταν και μόνο όταν για οποιαδήποτε $m \in \mathbb{N}, t_1, ..., t_m$ στο Y και $c_1, ..., c_m$ στο $\mathbb{C}$ ισχύει:*

$$\sum_{k,\ell=1}^{m} c_k \bar{c}_\ell \mathcal{X}(t_k - t_\ell) \geq 0$$

Ιδιότητες μιας θετικά ορισμένης συνάρτησης $\mathcal{X} : Y \mapsto \mathbb{C}$ που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό είναι μεταξύ άλλων οι:

1. $\mathcal{X}(-t) = \overline{\mathcal{X}(t)}$ για κάθε $t \in Y$
2. $|\mathcal{X}(t)| \leq \mathcal{X}(0)$ για κάθε $t \in Y$
3. $|\mathcal{X}(t_1) - \mathcal{X}(t_2)|^2 \leq 2\mathcal{X}(0)[\mathcal{X}(0) - Re\mathcal{X}(t_1 - t_2)]$ για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in Y$
4. Οι $\mathcal{X}^n, n \in \mathbb{N}$ και $e^{\mathcal{X}}$ είναι θετικά ορισμένες
5. Αν $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ είναι θετικά ορισμένες στις προσθετικές ομάδες Y_1, Y_2 αντίστοιχα τότε η $\mathcal{X}(t_1, t_2) = \mathcal{X}_1(t_1) \cdot \mathcal{X}_2(t_2), \quad (t_1, t_2) \in Y_1 \times Y_2$ είναι θετικά ορισμένη στην $Y_1 \times Y_2$.

Άσκηση 42. Αν η $\mathcal{X} : Y \mapsto \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένη στον **τοπολογικό** διανυσματικό χώρο Y και αν η $Re\mathcal{X}$ είναι συνεχής στο $y = 0$ τότε η $\mathcal{X}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στον Y.

Υπόδειξη: Επικαλεστείτε την 3.

Ο τύπος (1) έχει νόημα για $t \in X$ όπου X χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)$, αρκεί το μέτρο πιθανότητας μ να ορίζεται σε σ-άλγεβρα για την οποία οι συναρτήσεις $x \mapsto (x, t)$ να είναι μετρήσιμες. Επειδή τώρα στους χώρους Hilbert κάθε γραμμικό συναρτησοειδές ℓ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $\ell(x) = (x, t(\ell))$ από τη σχέση (1) για $t \in X$ έχουμε

$$\mathcal{X}(\ell) \equiv \Psi(t(\ell)) = \int_X e^{i(x,t(\ell))} d\mu(x) = \int_X e^{i\ell(x)} d\mu(x)$$

Αυτές οι παρατηρήσεις εμπνέουν ορισμό χαρακτηριστικού συναρτησοειδούς μέτρων πιθανότητας σε τοπικά κυρτούς τοπ. διαν. χώρους.

Ορισμός 5.1.3. *Έστω τοπικά κυρτός διαν. τοπολ. χώρος X και ένας διαν. χώρος $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$. Έστω μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$. Ορίζεται ως* *χαρακτηριστικό συναρτησοειδές* (χ.σ.) *του μέτρου* μ *η συνάρτηση* $\mathcal{X} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ *που ορίζεται από την*

$$\mathcal{X}(f) = \int_X e^{if(x)} d\mu(x) \quad , \quad f \in \Gamma$$

Συχνά το χ.σ. $\mathcal{X}$ *του μέτρου* μ *σημειώνεται* $\hat{\mu}$.

Όπως εύκολα διαπιστώνεται το ολοκλήρωμα του ορισμού υπάρχει πάντα (στο $\mathbb{C}$). Ακόμα αν ορίσουμε στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ τα μέτρα $v_f, f \in \Gamma$ μέσω της $v_f(B) = \mu(f^{-1}(B)), B \in \mathscr{B}^1$ τότε $\mathcal{X}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iz} dv_f(z), f \in \Gamma$ και συνεπώς

$$\hat{\mu}(f) = \hat{v}_f(1), f \in \Gamma \tag{2}$$

όπου $\hat{v}_f$ η χ.σ. του μέτρου v_f στον $\mathbb{R}$.

Πρόταση 5.1.4. *Βασικές ιδιότητες του χ.σ.*

1. *Το χ.σ.* $\hat{\mu}$ *είναι θετικά ορισμένη και* $\hat{\mu}(0) = 1$
2. *Αν* $\{f, f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ *με* $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ *για κάθε* $x \in X$ *τότε* $\lim\limits_n \hat{\mu}(f_n) = \hat{\mu}(f)$.

Απόδειξη.

1. Για τυχόν $g = (f_1, ..., f_n) \in \Gamma^n$ ορίζουμε στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ το μέτρο $v_g(B) = \mu(g^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$. Τότε για τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$ και γράφοντας $y \cdot g = y_1 f_1 + ... + y_n f_n$ έχουμε

   $$\hat{\mu}(y \cdot g) = \int_X e^{i(y \cdot g)(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot z} dv_g(z)$$

   και άρα

   $$\hat{\mu}(y \cdot g) = \hat{v}_g(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

   όπου $\hat{v}_g$ η χ.σ. του μέτρου v_g στον $\mathbb{R}^n$.
   Συνεπώς για τυχόντα $k, \ell \in \{1, ..., n\}$ έχουμε

   $$\hat{\mu}(f_k - f_\ell) = \hat{v}_g(z_k - z_\ell)$$

   όπου $z_k \in \mathbb{R}^n$ με όλες τις συντεταγμένες 0 εκτός της k που είναι 1.
   Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε το θεώρημα Bochner για την χ.σ. $\hat{v}_g$.
2. Αρκεί η επίκληση του θεωρήματος Ελεγχόμενης σύγκλισης του Lebesgue .

$\square$

Πόρισμα 5.1.5. Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. X και διανυσματικός υπόχωρος $\Gamma \subset X'$.

1. Η χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι **ακολουθιακά συνεχής** για την τοπολογία $\sigma(X', X)$ που επάγεται στον Γ.
2. Αν ο χώρος X είναι με norm τότε η χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για την τοπολογία $\mathscr{C}(X', X)$ που επάγεται στο χώρο Γ (και παράγεται από τη norm $\|x'\| = \sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$).

Απόδειξη.

1. Άμεση συνέπεια του (2) της προηγούμενης πρότασης
2. Αφού η $\hat{\mu}$ είναι ακολουθιακά συνεχής για την $\sigma(X', X)$ στο Γ θα είναι και ακολουθιακά συνεχής για την $\mathscr{C}(X', X)$ στο Γ.
   Όμως η $\mathscr{C}(X', X)$ παράγεται από τη norm $\|x'\|$ και άρα η ακολουθιακή συνέχεια συνεπάγεται συνέχεια για την $\mathscr{C}(X', X)$ στο Γ και ιδιαίτερα συνέχεια της $Re\hat{\mu}$ στο μηδέν.Όμως η χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση και επικαλούμενοι την ιδιότητα (3) των θετικά ορισμένων συναρτήσεων συμπεραίνουμε την ομοιόμορφη συνέχεια της $\hat{\mu}$ (πάντα για την τοπολογία $\mathscr{C}(X', X)$ στο Γ).

□

Η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας μ το προσδιορίζει μονοσήμαντα όπως φαίνεται από το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 5.1.6. *Έστω μέτρα πιθανότητας μ_1, μ_2 ορισμένα στον $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$ όπου Γ διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^X$ και $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ στο Γ. Τότε $\mu_1 = \mu_2$ στην $\hat{C}(X, \Gamma)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mu_1 = \mu_2$ στην άλγεβρα $C(X, \Gamma)$ που παράγει την $\hat{C}(X, \Gamma)$.Όμως $C(X, \Gamma) = \bigcup\limits_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$ όπου $\Lambda = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$ και $\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^k\}$ με $f = (f_1, ..., f_k)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \Lambda$ ισχύει $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{A}_f$. Πράγματι, για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ ορίζουμε τα μέτρα $v_i (i = 1, 2)$ στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ μέσω της $v_i(B) = \mu_i(f^{-1}(B))$. Τότε για τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$ και γράφοντας $y \cdot f = y_1 f_1 + ... + y_n f_n$ έχουμε (όπως στην απόδειξη του (1) της Πρότασης 5.1.4.)

$$\hat{\mu}_i(y \cdot f) = \hat{v}_i(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2)$$

Όμως από υπόθεση $\hat{v}_1 = \hat{v}_2$ και άρα (θεώρημα Bochner) $v_1 = v_2$ στην $\mathscr{B}^n$ ήτοι $\mu_1(f^{-1}(B)) = \mu_2(f^{-1}(B))$ για κάθε $B \in \mathscr{B}^n$.
Ώστε $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{A}_f$. □

Πόρισμα 5.1.7. Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. X και διανυσματικός υπόχωρος $\Gamma \subset C(X, \mathbb{R})$ που **διαχωρίζει** τα σημεία του X. Έστω **κανονικά** μέτρα πιθανότητας ορισμένα στον $(X, \mathscr{B}(X))$. Αν $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ στο Γ τότε $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{B}(X)$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη Πρόταση είναι $\mu_1 = \mu_2$ στην $\hat{C}(X,\Gamma)$ και άρα $\mu_1 = \mu_2$ στην άλγεβρα $\mathscr{A} = C(X,\Gamma)$. Επειδή ο X είναι τοπ. κυρτός τοπ. διαν. χώρος, είναι πλήρως κανονικός (completely regular) και συνεπώς για τα κανονικά μέτρα μ_1, μ_2 μπορεί να αναπαραχθεί κατά γράμμα η απόδειξη μοναδικότητας του Θεωρήματος 2.4.9. □

Πόρισμα 5.1.8. Έστω μ_1, μ_2 μέτρα πιθανότητας στον $(X, \hat{C}(X,\Gamma))$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in \Gamma$ τα μέτρα πιθανότητας $\upsilon_f^1, \upsilon_f^2$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ που ορίζονται από τις : $\upsilon_f^1(B) = \mu_1(f^{-1}(B))$ και $\upsilon_f^2(B) = \mu_2(f^{-1}(B))$, $B \in \mathscr{B}^1$ είναι ίσα. Τότε $\mu_1 = \mu_2$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τη σχέση (2) του Ορισμού 5.1.3. ισχύουν:

$$\hat{\mu}_1(f) = \hat{\upsilon}_f^1(1) \quad \text{και} \quad \hat{\mu}_2(f) = \hat{\upsilon}_f^2(1) \quad \forall f \in \Gamma$$

Όμως $\hat{\upsilon}_f^1, \hat{\upsilon}_f^2$ είναι χ.σ. των μέτρων $\upsilon_f^1, \upsilon_f^2$ και συνεπώς $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$.

□

Άσκηση 43. Έστω $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο.

1. Δείξτε ότι ο δυϊκός του ταυτίζεται με το σύνολο

$$\mathbb{R}_o^{\mathbb{N}} \equiv \{(a_1, a_2, ...) : \text{ υπάρχει } k \in \mathbb{N} \text{ με } a_i = 0 \forall i \geq k\}$$

2. Δείξτε ότι $\hat{C}(X, X') = \mathscr{B}(X)$.

3. Έστω μ_1, μ_2 μέτρα πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}(X))$ τέτοια ώστε $\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}_o^{\mathbb{N}}$. Δείξτε ότι $\mu_1 = \mu_2$.

5.2 Χαρακτηριστικά συναρτησοειδή κυλινδρικών μέτρων

Τα κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας ορίζονται στον $(X, C(X,\Gamma))$ και όπως φαίνεται από τον ορισμό τους **δεν** είναι μέτρα παρά μόνο όταν περιορίζονται στις σ-άλγεβρες $\mathscr{A}_f, f \in \Lambda$ η ένωση των οποίων συνιστά την άλγεβρα $C(X,\Gamma)$. Αυτό το γνώρισμα καθιστά δυνατό τον ορισμό του χαρακτηριστικού συναρτησοειδούς.

Ορισμός 5.2.1. *Έστω κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο στον $(X, C(X,\Gamma))$ όπου Γ διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^X$. Λέγεται* **χαρακτηριστικό συναρτησοειδές** *του μ η συνάρτηση $\mathscr{X} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ που ορίζεται από την $\mathscr{X}(f) = \int\limits_X e^{if(x)} d\mu(x) \quad , f \in \Gamma$ όπου για έκαστο $f \in \Gamma$ το ολοκλήρωμα νοείται στον χώρο μέτρου $(X, \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^1\}, \mu)$. Συμβολικά γράφουμε $\hat{\mu}$ το χ.σ. του κυλινδρικού μέτρου μ.*

Το χ.σ. ενός κυλινδρικού μέτρου πιθανότητας απολαμβάνει ανάλογων ιδιοτήτων με το χ.σ. ενός "πραγματικού" μέτρου πιθανότητας όπως φαίνεται στην παρακάτω:

Πρόταση 5.2.2. *Έστω Γ διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^X$. Τότε:*

1. *Αν μ_1, μ_2 είναι κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας στον $(X, C(X,\Gamma))$ με $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ τότε $\mu_1 = \mu_2$.*

2. *Αν μ είναι κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στον $(X, C(X,\Gamma))$ τότε το χ.σ. $\hat{\mu} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένο με $\hat{\mu}(0) = 1$ και* **ψευδοσυνεχές** *δηλαδή συνεχής συνάρτηση σε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του Γ.*

Απόδειξη. Όπως του αυτή του Θεωρήματος 5.1.6. και του (1) της Πρότασης 5.1.4.
Για την ψευδοσυνέχεια θεωρείστε μια βάση $\{f_1, ..., f_k\}$ του υποχώρου και την ευκλείδια norm που προκύπτει : $\|g\| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_k^2}$ όταν $g = y_1 f_1 + ... + y_k f_k = y \cdot f$ με $f = (f_1, ..., f_k)$.
Όπως είναι γνωστό (Robertson & Robertson σελ. 37) η τοπολογία του υποχώρου η επαγόμενη από τον X συμπίπτει με αυτήν που προκύπτει από την norm $\| \ \|$ και όπως εύκολα διαπιστώνεται $g_n = y_n \cdot f \to y \cdot f = g$ στον υπόχωρο $\Leftrightarrow |y_n - y| \to 0$ όπου $| \ |$ η norm του $\mathbb{R}^k$. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε την (3) της Πρότασης 5.1.4. που ισχύει και για κυλινδρικά μέτρα. □

Από την άποψη της κατασκευής ενός κυλινδρικού μέτρου το σημαντικό αποτέλεσμα περιέχεται στο παρακάτω Θεώρημα για την απόδειξη του οποίου χρειαζόμαστε το στοιχειώδες:

Λήμμα 5.2.3. *Έστω μέτρο πιθανότητας ρ στον $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ και γραμμική $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ με ανάστροφη $\phi^\top : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας ν στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ με την $\nu(B) = \rho(\phi^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$. Τότε:*

$$\hat{\nu}(z) = \hat{\rho}(\phi^\top(z)) \quad , z \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

Αντίστροφα όταν για μέτρα πιθανότητας ν,ρ ορισμένα στους $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ και $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ αντίστοιχα ισχύει η (4) τότε $\nu(B) = \rho(\phi^{-1}(B))$ για κάθε $B \in \mathscr{B}^n$.

Απόδειξη. Έστω $[a_{ij}]$ ο $n \times m$ πίνακας της φ. Τότε για τυχόντα $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ και $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ ισχύει $z \cdot \phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_i a_{ij} t_j = \sum_{j=1}^{m} t_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i = t \cdot [a_{ij}]^\top z$ δηλαδή

$$z \cdot \phi(t) = t \cdot \phi^\top(z) \tag{5}$$

Τώρα για τα μέτρα ν,ρ, ως γνωστόν ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{iz \cdot \phi(t)} d\rho(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz \cdot y} d\nu(y) = \hat{\nu}(z)$$

Όμως λόγω της(5) το πρώτο μέλος γράφεται

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{it \cdot \phi^\top(z)} d\rho(t) = \hat{\rho}(\phi^\top(z))$$

και άρα η ζητούμενη (4).
Αντίστροφα· κατά τα παραπάνω το μέτρο $\lambda(B) = \rho(\phi^{-1}(B)), B \in \mathscr{B}^n$ έχει χ.σ. $\hat{\lambda}(z) = \rho(\phi^\top(z)), z \in \mathbb{R}^n$ και λόγω της (4) θα είναι $\hat{\lambda} = \hat{\nu}$ άρα το ζητούμενο.

□

Η απόδειξη του επόμενου κατασκευαστικού αποτελέσματος βασίζεται στο Θεώρημα 4.4.6.

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω δ.χ. X και γραμμικός υπόχωρος $\Gamma \subset X^*$ (όπου X^* ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Έστω συνάρτηση $\mathscr{X} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ θετικά ορισμένη με $\mathscr{X}(0) = 1$ και* ***ψευδοσυνεχής*** *(δηλαδή συνεχής σε κάθε πεπερασμένης διάσταση υπόχωρο του Γ).*
Τότε υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στον X με χ.σ. $\hat{\mu} = \mathscr{X}$.

Απόδειξη. Ας είναι
$L = \{(f_1, ...f_n) : n \in \mathbb{N}$ και $\{f_1, ..., f_n\} \subset \Gamma$ γραμμικά ανεξάρτητα$\}$.
Για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ θέτουμε $\Psi_f(y) = \mathscr{X}(y \cdot f), y \in \mathbb{R}^n$. Άμεσα είναι $\Psi_f(0) = 1$ και όπως στο (1) της Πρότασης 5.1.4. αποδεικνύεται ότι η Ψ_f είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$.
Θα δείξουμε τώρα ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Έστω $V \subset \Gamma$ ο διανυσματικός υπόχωρος ο παραγόμενος από τα $\{f_1, ..., f_n\}$ εφοδιασμένος με την ευκλείδια norm $\|g\| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$ όταν $g = y_1 f_1 + ... + y_n f_n$. Για ακολουθία $y_k \to y$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε $\|y_k \cdot f - y \cdot f\| = \|(y_k - y) \cdot f\| = |y_k - y|$ και συνεπώς $\|y_k f - y f\| \to 0$. Όμως από υπόθεση η $\mathscr{X}$ είναι συνεχής στον υπόχωρο V και άρα $\mathscr{X}(y_k f) \to \mathscr{X}(yf)$ οπότε $\Psi_f(y_k) \to \Psi_f(y)$.
Ώστε η Ψ_f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bochner και συνεπώς υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ_f στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ εις τρόπον ώστε $\hat{\mu}_f = \Psi_f$.
Αν τώρα $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ και γραμμική $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ με $f = \phi \circ h$ τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $y \cdot \phi \circ h = \phi^\top(y) \cdot h$ που προκύπτει από την (5) έχουμε:

$$\mathscr{X}(y \cdot f) = \mathscr{X}(y \cdot \phi \circ h) = \mathscr{X}(\phi^\top(y) \cdot h)$$

και συνεπώς

$$\Psi_f(y) = \Psi_h(\phi^\top(y)) \quad , y \in \mathbb{R}^n$$

Έτσι κατά το προηγούμενο Λήμμα για τα μέτρα πιθανότητας μ_f και μ_h στους $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ και $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ αντίστοιχα ισχύει

$$\mu_f(B) = \mu_h(\phi^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$$

Επικαλούμενοι τώρα το Θεώρημα 4.4.6. συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ τέτοιο ώστε για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $B \in \mathscr{B}^n$

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B) \tag{6}$$

Τώρα για τυχόν $g \in \Gamma$ είναι $\hat{\mu}(g) = \int e^{ig(x)} d\mu(x)$ και λόγω της (6) $\hat{\mu}(g) = \int e^{iz} d\mu_g(z) = \hat{\mu}_g(1) = \Psi_g(1) = \mathscr{X}(g)$.

□

Θα εξετασθεί παρακάτω η σχέση ασθενούς σύγκλισης ακολουθιών μέτρων πιθανότητας και των αντίστοιχων χ.σ. τους.
Έστω τοπολογικός χώρος Hausdorff X και διανυσματικός χώρος $\Gamma \subset C(X, \mathbb{R})$. Είναι προφανές ότι $\mathscr{B}(X) \supset \hat{C}(X, \Gamma)$ και συνεπώς αν μ είναι κανονικό μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}(X))$ τότε είναι εφφικτός ο ορισμός χαρακτηριστικού συναρτησοειδούς για το μέτρο μ

$$\hat{\mu}(f) = \int_X e^{if(x)} d\mu(x) \quad , f \in \Gamma$$

Έστω $P(X)$ το σύνολο των **κανονικών** μέτρων πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}(X))$. Το σύνολο $P(X)$ θεωρείται εφοδιασμένο με την ασθενή τοπολογία W.

Θεώρημα 5.2.5. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και διανυσματικός υπόχωρος $\Gamma \subset C(X, \mathbb{R})$. Έστω δίκτυο $\{\mu_a, a \in I\} \subset P(X)$. Τότε:*

1. *Αν $\mu_a \xrightarrow{W} \mu \in P(X)$ τότε $\hat{\mu}_a(f) \to \hat{\mu}(f)$ για κάθε $f \in \Gamma$.*
2. *Αν ο υπόχωρος Γ διαχωρίζει τα σημεία του X και*
   Αν το σύνολο $\overline{\{\mu_a, a \in I\}}$ είναι συμπαγές στον $(P(X), W)$ και
   Αν $\lim_a \hat{\mu}_a(f) = \mathscr{X}(f)$ για κάθε $f \in \Gamma$ όπου $\mathscr{X} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$.

Τότε υπάρχει $\mu \in P(X)$ με $\hat{\mu} = \mathscr{X}$ και $\mu_a \xrightarrow{W} \mu$.

Απόδειξη.

1. $e^{if(x)} = \cos f(x) + i \sin f(x)$ και ο ορισμός της ασθενούς σύγκλισης αρκούν.
2. Θα δείξουμε καταρχήν ότι το σύνολο $\{\mu_a, a \in I\}$ έχει ένα μόνο σημείο συσσώρευσης μ στον $(P(X), W)$.
   Έστω $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$ δυο σημεία συσσώρευσης του $\{\mu_a, a \in I\}$.Τότε υπάρχουν υποδίκτυα $\{\mu_k\}, \{\mu_\lambda\}$ με $\mu_k \xrightarrow{W} \mu_1$ και $\mu_\lambda \xrightarrow{W} \mu_2$. Κατά την υπόθεση $\lim \hat{\mu}_k(f) = \lim \hat{\mu}_\lambda(f) = \lim \hat{\mu}_a(f) = \mathscr{X}(f)$ για κάθε $f \in \Gamma$. Εξάλλου από το (1) έχουμε $\lim_a \hat{\mu}_k(f) = \hat{\mu}_1(f), \lim_a \hat{\mu}_\lambda(f) = \hat{\mu}_2(f)$ για $f \in \Gamma$ και συνεπώς $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \mathscr{X}$. Άρα κατά το Πόρισμα 5.1.7. θα είναι $\mu_1 = \mu_2$. Έστω λοιπόν μ το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του συνόλου $\{\mu_a, a \in I\}$. Αυτό και η σχετική συμπάγεια συνεπάγονται ότι $\mu_a \xrightarrow{W} \mu$. Από το (1) τώρα συμπεραίνουμε ότι $\hat{\mu} = \mathscr{X}$.

□

Παρατήρηση 5.2.6. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και όταν η υπόθεση του τοπικά κυρτού τ.δ.χ αντικατασταθεί από αυτήν του πλήρως κανονικού τοπολογικού χώρου. Με ανάλογη αναθεώρηση του Πορίσματος η απόδειξη παραμένει η ίδια με αυτήν που παρατίθεται (δες [16]).

Κεφάλαιο 6

Θεωρήματα Minlos και Sazonov

Ήδη από το Θεώρημα 5.2.4. γνωρίζουμε ότι ένα θετικά ορισμένο συναρτησοειδές όταν είναι και ψευδοσυνεχές τότε "παράγει" ένα κυλινδρικό μέτρο κατά μοναδικό τρόπο. Αυτό βέβαια δημιουργεί την προσδοκία ότι μια "καλύτερη" συνέχεια θα εξασφάλιζε ένα (πραγματικό) μέτρο και ει δυνατόν κανονικό.Στην προσδοκία αυτή απαντούν τα θεωρήματα (τύπου) Minlos και Sazonov που αναπτύσσονται στη συνέχεια. Η γραμμή ανάπτυξης του θεμελιώδους Θεωρήματος είναι αυτή του [16]. Προηγουμένως όμως κάποια στοιχειώδη αποτελέσματα στους συμμετρικούς τελεστές.

6.1 Συμμετρικοί τελεστές

Ορισμός 6.1.1. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και X' ο δυϊκός του. Ένας τελεστής $R : X' \mapsto X$ ονομάζεται* ***συμμετρικός*** *όταν και μόνο όταν για όλα τα x', y' στο X' ισχύει:*

$$< Rx', y' >=< Ry', x' > \tag{1}$$

Ένας συμμετρκός τελεστής λέγεται ***θετικός*** *όταν για κάθε $x' \in X'$ ισχύει*

$$< Rx', x' >\geq 0$$

Όταν ο χώρος είναι ***Hilbert*** *τότε λόγω της ισομετρικής ταύτισης $X \simeq X'$ (αναπαράσταση Riesz) η (1) μπορεί να γραφεί*

$$(Rx, y) = (Ry, x) \text{ για όλα τα } x, y, \in X$$

και η θετικότητα αντίστοιχα εξασφαλίζεται από την

$$(Rx, x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in X$$

Οι επόμενες προτάσεις αναφέρονται σε στοιχειώδεις ιδιότητες των συμμετρικών τελεστών. Σε **όλες** τις Προτάσεις αυτές ο τ.δ.χ. X είναι **τοπικά κυρτός**. Ειδικότερες περιπτώσεις θα αναφέρονται ρητά.

Πρόταση 6.1.2. *Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός,θετικός. Τότε:*

1. *η $\phi(x', y') =< Rx', y' >$ είναι διγραμμική,θετική*
2. *Ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz*

$$| < Rx', y' > |^2 \leq < Rx', x' >< Ry', y' > \quad \forall x', y' \in X'$$

Απόδειξη.

1. Άμεση
2. Αρκεί να αναπτύξουμε την $< R(\lambda x' + y'), \lambda x' + y' > \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

□

Πρόταση 6.1.3. *Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός. Τότε είναι:*

1. *Γραμμικός*
2. *$\sigma(X', X) - \sigma(X, X')$ συνεχής*
3. *$\tau(X', X) - \tau(X, X')$ συνεχής*
4. *$\mathscr{C}(X', X) - \mathscr{C}(X, X')$ συνεχής*

Απόδειξη.

1. Για τυχόντα $x', y' \in X'$ και για όλα τα $\ell \in X'$ έχουμε
$\ell(R(x' + y')) =< R(\ell), x' + y' >=< R(\ell), x' > + < R(\ell), y' >=$
$< Rx', \ell > + < Ry', \ell >= \ell(Rx' + Ry')$

2. Για τυχόν δίκτυο $\{x'_a\} \subset X'$ με $x'_a \xrightarrow{\sigma} x'$ έχουμε για όλα τα $y' \in X'$:
$< Rx'_a, y' >=< Ry', x'_a >\to< Ry', x' >=< Rx', y' >$ και άρα $Rx'_a \to Rx'$ για την τοπολογία $\sigma(X, X')$.

3. Έστω $p'_\Gamma, \Gamma \in \mathscr{E}'$ και $q'_\Delta, \Delta \in \mathscr{E}$ οι seminorm που ορίζουν τις τοπολογίες $\tau(X, X')$ και $\tau(X', X)$ αντίστοιχα. Τότε για τυχόν $\Gamma \in \mathscr{E}'$ δηλαδή κυρτό,ισόρροπο και $\sigma(X', X)$ - συμπαγές το $\Delta = R(\Gamma)$ είναι κυρτό,ισόρροπο και λόγω (1) $\sigma(X, X')$-συμπαγές, δηλαδή $\Delta \in \mathscr{E}$.
Επιπλέον για τυχόν $y' \in X'$ είναι $p'_\Gamma(Ry') = \sup_{x' \in \Gamma} | < Ry', x' > | =$
$\sup_{x' \in \Gamma} | < Rx', y' > | \leq \sup_{x \in \Delta} | < x, y' > |$ και συνεπώς

$$p'_\Gamma(Ry') \leq q'_\Delta(y') \quad \text{για κάθε} \quad y' \in X'$$

4. Παρόμοιος χειρισμός για τις norm $p'_B, B \in \mathscr{D}'$ και $q'_A, A \in \mathscr{D}$ που ορίζουν τις $\mathscr{C}(X, X')$ και $\mathscr{C}(X', X)$ αντίστοιχα.

□

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός,θετικός τελεστής. Η συνάρτηση $\phi : X' \mapsto \mathbb{R}$ η οριζόμενη από την $\phi(x') = < Rx', x' >$ είναι $\mathscr{C}(X', X)$-συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω δίκτυο $\{x'_a\} \subset X'$ με $x'_a \xrightarrow{\mathscr{C}} x' \in X'$. Τότε από τον ορισμό της $\mathscr{C}(X', X)$ θα έχουμε για κάθε $\sigma(X, X')$-φραγμένο $A \subset X$

$$\sup_{u \in A} |x'_a(u) - x'(u)| < \epsilon \text{ για κάθε } a > a_0(\epsilon, A)$$

Εξάλλου το σύνολο $B = \overline{\{x'_a\}}$ είναι $\mathscr{C}(X', X)$-συμπαγές συνεπώς $\sigma(X', X)$-συμπαγές και άρα το $\Gamma = R(B)$ είναι $\sigma(X, X')$-φραγμένο οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται

$$| < Rx'_a, x'_a > - < Rx'_a, x' > | < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad a > a_0$$

Έτσι

$$\begin{aligned} | < Rx'_a, x'_a > - < Rx', x' > | & \\ & \leq | < Rx'_a, x'_a > - < Rx'_a, x' > | + | < Rx'_a, x' > - < Rx', x' > | \\ & < \epsilon + | < Rx'_a, x' > - < Rx', x' > | \quad \text{για} \quad a > a_0 \end{aligned}$$

Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε τη συνέχεια του R όπως προκύπτει από την προηγούμενη Πρόταση.

□

Παρατήρηση 6.1.5. Είναι σκόπιμο να υπενθυμίσουμε ότι αν X είναι χώρος Banach τότε η τοπολογία $\mathscr{C}(X', X)$ συμπίπτει με αυτή που προκύπτει από τη norm του X' την οριζόμενη από $\|x'\| = \sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$.

Πρόταση 6.1.6. *Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός, θετικός.Τότε η συνάρτηση $q_R(x') = \sqrt{< Rx', x' >}, x' \in X'$ ορίζει seminorm στον X'.*

Απόδειξη. Η συμμετρία και η ανισότητα Cauchy-Schwartz συνεπάγονται

$$\begin{aligned} q_R^2(x' + y') &= < Rx', x' > + < Ry', y' > +2 < Rx', y' > \\ &\leq < Rx', x' > + < Ry', y' > +2\sqrt{< Rx', x' >}\sqrt{< Ry', y' >} \\ &= (q_R(x') + q_R(y'))^2 \end{aligned}$$

Οι άλλες απαιτήσεις μιας seminorm είναι προφανείς. □

6.2 Η τοπολογία Sazonov

Ορισμός 6.2.1. *Έστω H χώρος Hilbert. Ένας γραμμικός τελεστής $T : H \mapsto H$ ονομάζεται* **πυρηνικός** *(nuclear) όταν και μόνο όταν υπάρχουν $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}, \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \subset H$ με $\sum\limits_n \|x_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$ εις τρόπον ώστε*

$$Tx = \sum_n (x, x_n) y_n, x \in H.$$

Με $\mathbf{S}(H)$ θα γράφουμε το σύνολο των **συμμετρικών, θετικών** και **πυρηνικών** τελεστών που ορίζονται στον H. Από την Πρόταση 6.1.3. προκύπτει ότι $\mathbf{S}(H) \subset \mathbf{L}(H, H)$-το σύνολο των συνεχών γραμμικών τελεστών του H. Να σημειωθεί ακόμα ότι ένας συμμετρικός,πυρηνικός τελεστής είναι **συμπαγής**.

Έστω τώρα X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. με δυϊκό X'. Με $\mathcal{R}(X', X)$ θα γράφουμε το σύνολο των τελεστών $R : X' \mapsto X$ με την ιδιότητα: Υπάρχει χώρος Hilbert H, γραμμική συνεχής $u : H \mapsto X$ και $S \in \mathbf{S}(H)$ εις τρόπον ώστε να ισχύει

$$R = u \circ S \circ u'$$

όπου $u' : X' \mapsto H$ η συζυγής της u (οριζόμενη από την $(y, u'(x')) =< u(y), x' >$ για $x' \in X', y \in H$).
Η συνέχεια της $u : H \mapsto X$ αναφέρεται στην τοπολογία της norm του H και στην αρχικώς δοθείσα τοπολογία ξ του τοπικά κυρτού διαν. χώρου X για την οποία $X' = (X, \xi)'$.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. χώρος X και X' ο δυϊκός του.*

1. *Κάθε τελεστής $R \in \mathcal{R}(X', X)$ είναι συμμετρικός,θετικός.*
2. *Η $q_R(x') = \sqrt{< Rx', x' >}$ ορίζει seminorm.*
3. *Η οικογένεια seminorm $q_R, R \in \mathcal{R}(X', X)$ διαχωρίζει τα σημεία του X'.*

Απόδειξη.

1. $< Rx', y' >=< u(S(u'(x'))), y' >=< S(u'(x')), u'(y') >$ από τον ορισμό u'. Λόγω της συμμετρίας του S η τελευταία παράσταση ισούται με $< S(u'(y')), u'(x') >$ και αυτή πάλι λόγω συζυγίας με $< u(S(u'(y'))), x' >=< Ry', x' >$. Η πρώτη γραμμή από τις παραπάνω για $x' = y'$ και η θετικότητα του S συνεπάγεται τη θετικότητα του R.
2. Απόδειχτηκε στην Πρόταση 6.1.5.
3. Έστω τυχόν $x'_0 \neq 0$. Προφανώς υπάρχει $x_0 \in X \setminus \{0\}$ με $x'_0(x_0) \neq 0$. Έστω πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος $H \subset X$ με $x_0 \in H$. Όπως είναι γνωστό η τοπολογία του H είναι η συνήθης Ευκλείδια. (Robertson & Robertson σελ. 37).

Ορίζουμε $u : H \mapsto X$ με την $u(x) = x$. Από τον ορισμό της u' και το γεγονός ότι $x_0'(x_0) \neq 0$ προκύπτει άμεσα ότι $u'(x_0') \equiv a \neq 0$.
Θεωρούμε τον $S_0 : H \mapsto H$ οριζόμενο ως $S_0 y = (y, a)a$. Προφανώς $S_0 \in \mathbf{S}(H)$ και συνεπώς ο τελεστής $R_0 = u \circ S_0 \circ u'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{R}(X', X)$.Επιπλέον $R_0 x_0' = u(S_0(a)) = |a|^2 u(a)$ όπου $|\cdot|$ η norm του H οπότε $< R_0 x_0', x_0' >= |a|^2 < u(a), x_0' >= |a|^2 (a, u'(x_0')) = |a|^2 \cdot (a, a) = |a|^4 > 0$.

□

Ορισμός 6.2.3. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και X' ο δυϊκός του. Ονομάζεται* ***τοπολογία Sazonov*** *του X' και σημειώνεται $\tau_S(X', X)$ η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια seminorm $\{q_R, R \in \mathcal{R}\}$ όπου $q_r(x') = \sqrt{< Rx', x' >}, x' \in X'$. Ο τ.δ.χ. $(X', \tau_S(X', X))$ είναι Hausdorff τοπικά κυρτός.*

Παρατήρηση 6.2.4. Όπως προκύπτει από την Πρόταση 6.1.4. είναι

$$\tau_S(X', X) \subset \mathscr{C}(X', X)$$

Η συνέχεια για την τοπολογία Sazonov ενός θετικά ορισμένου συναρτησοειδούς είναι όπως θα δούμε παρακάτω ικανή συνθήκη για την ύπαρξη αντίστοιχου κανονικού μέτρου πιθανότητας.Τώρα όμως θα παραθέσουμε δύο στοιχεώδη τεχνικά Λήμματα για την απόδειξη του απαραίτητου και ουσιώδους Λήμματος του R.A Minlos.

Λήμμα 6.2.5.

1. *Αν $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ και ισχύει $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \beta_i| \leq 1$ για όλα τα $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i^2 \leq 1$ όπου $m \leq n$ και $\lambda_i > 0$ τότε $\beta_i = 0$ για $i = m+1, ..., n$.*

2. *Αν $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$ και ισχύει $|\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \delta_i| \leq 1$ για όλα τα $\delta = (\delta_1, ..., \delta_m)$ με $\sum\limits_{i=1}^{m} \delta_i^2 \leq \theta$ τότε $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \leq \frac{1}{\theta}$ $(\theta > 0)$ και αντίστροφα.*

Απόδειξη.

1. Αρκεί να δειχθεί για $m < n$. Πράγματι έστω $\beta_k \neq 0$ για $k > m$. Τότε για τυχόν $a \in \mathbb{R}^n$ με $a_i = 0$ για $i \neq k$ και $a_k = \frac{2}{|\beta_k|}$ θα έχουμε $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i^2 = 0 \leq 1$ και $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \beta_i| = |a_k \beta_k| = 2 > 1$ - άτοπο.

2. Πράγματι, αν είναι $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i^2 > \frac{1}{\theta}$ τότε για $\delta_i = \frac{\gamma_i \sqrt{\theta}}{|\gamma|}$ θα είναι $\sum\limits_{i=1}^{m} \delta_i^2 = \theta$ και $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \delta_i = \sqrt{\theta}|\gamma| > \sqrt{\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta}} = 1$

Αντίστροφα αν ισχύει $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \leq \frac{1}{\theta}$ τότε για τυχόν $\delta \in \mathbb{R}^m$ με $\sum\limits_{i=1}^{m} \delta_i^2 \leq \theta$ και επικαλούμενοι την Cauchy-Schwartz θα έχουμε ότι $|\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \delta_i| \leq 1$.

□

Λήμμα 6.2.6. *Έστω ν,ρ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ εκ των οποίων το μέτρο ρ είναι Gauss με μέση τιμή μηδέν. Τότε για τυχόν $\theta \in (0,1)$ ισχύει:*

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^n : \hat{\rho}(x) \leq \theta\}) \leq \frac{1}{1-\theta} \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \hat{\nu}(t)) d\rho(t)$$

Απόδειξη. Όπως είναι γνωστό η $\hat{\rho}$ είναι πραγματική συνάρτηση και $1 - \hat{\rho} \geq 0$ οπότε $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 - \hat{\rho}(x)) d\nu(x) \geq \int\limits_{A} (1 - \hat{\rho}(x)) d\nu(x)$ όπου $A = \{x : 1 - \hat{\rho}(x) \geq 1 - \theta\}$. Συνεπώς $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 - \hat{\rho}(x)) d\nu(x) \geq (1-\theta)\nu(A)$. Όμως

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1 - \hat{\rho}(x)) d\nu(x) &= 1 - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\rho}(x) d\nu(x) \\
&= 1 - \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} d\rho(y)) d\nu(x) \\
&= 1 - \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} d\nu(x)) d\rho(y) \\
&= 1 - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\nu}(y) d\rho(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \hat{\nu}(y)) d\rho(y)
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψην ότι $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{\rho}(x) \leq \theta\}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 6.2.7. Σημειώστε επίσης ότι όπως προκύπτει από τη διαδικασία της απόδειξης το ολοκλήρωμα $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 - \hat{\nu}(y)) d\rho(y)$ είναι πραγματικός αριθμός αφού είναι ίσο με το $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 - \hat{\rho}(x)) d\nu(x)$.

Λήμμα 6.2.8. *(Minlos)*
Έστω ν μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ του οποίου η χαρακτηριστική συνάρτηση $\hat{\nu}$ για κάποιο $\epsilon > 0$ ικανοποιεί την

$$|1 - \hat{\nu}(x)| \leq \epsilon + (Bx, x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

όπου $B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ συμμετρικός, θετικός.
Υποθέτουμε ότι $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ είναι συμμετρικός, θετικός με $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax =$

$0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0\}$, μη-μηδενικές ιδιοτιμές $\lambda_1, ..., \lambda_m$ και αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $e_1, ..., e_m$. Τότε για τυχόν $r > 0$ ισχύει:

$$\nu(\mathbb{R}^n \setminus E^\circ) \leq 3(\epsilon + r\sum_{k=1}^{m}(By_k, y_k))$$

*όπου $y_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} e_k$ $(k = 1, ..., m), E = \{x \in \mathbb{R}^n : (Ax, x) \leq r\}$ και $E^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : |(y, x)| \leq 1$ για κάθε $x \in E\}$ -**πολικό** του E.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε τη ζητούμενη για $r = 1$.
Συμπληρώνουμε τα $\{e_1, ..., e_m\}$ με τα $e_{m+1}, ..., e_n$ ώστε τα $\{e_1, ..., e_n\}$ να αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Προφανώς $Ae_k = 0$ οπότε $Be_k = 0$ όταν $k = m + 1, ..., n$.
Καταρχήν να παρατηρήσουμε ότι ως προς τη βάση $\{e_1, ..., e_n\}$ ισχύουν:

$$(Ax, x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (x, e_j)^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 (x, y_j)^2$$

και

$$(y, x) = \sum_{i=1}^{n}(y, e_i)(x, e_i)$$

Συνεπώς το πολικό σύνολο E° του E γράφεται $E^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : |\sum\limits_{i=1}^{n}(y, e_i)(x, e_i)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_j (x, e_j)^2 \leq 1\}$. Επικαλούμενοι το Λήμμα 6.2.5. (1) διαπιστώνουμε ότι για τα $y \in \mathbb{R}^n$ που ανήκουν στο E° ισχύει $(y, e_i) = 0$ για $i = m + 1, ..., n$. Από αυτό και το γεγονός ότι $e_i = \sqrt{\lambda_i} y_i, i = 1, ..., m$ συμπεραίνουμε ότι $E^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : |\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i (y, y_i)(x, y_i)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2 (x, y_i)^2 \leq 1$ και $\sum\limits_{i=m+1}^{n}(y, e_i)^2 = 0\}$
Επικαλούμενοι τώρα το Λήμμα 6.2.5. (2) συμπεραίνουμε ότι

$$E^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{m}(y, y_i)^2 \leq 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=m+1}^{n}(y, e_i)^2 = 0\} \tag{1}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ τον τελεστή $A_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

$$A_k x = \sum_{i=1}^{m}(x, y_i) y_i + k^2 \sum_{i=m+1}^{n}(x, e_i) e_i$$

Εύκολα φαίνεται ότι

$$(A_k y, y) = \sum_{i=1}^{m}(y, y_i)^2 + k^2 \sum_{i=m+1}^{n}(y, e_i)^2 \tag{2}$$

Από τις (1),(2) εύκολα επαληθεύεται ότι

$$E^\circ = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{y \in \mathbb{R}^n : (A_k y, y) \leq 1\} \tag{3}$$

Έστω τώρα ρ_k το μέτρο πιθανότητας Gauss με μέση τιμή 0 και τελεστή συνδιακύμανσης A_k και άρα χαρακτηριστική συνάρτηση $\hat{\rho}_k(x) = exp\{-\frac{1}{2}(A_k x, x)\}, x \in \mathbb{R}^n$. Επειδή για τυχόν $x \in \mathbb{R}^n$ είναι $x = \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ θα έχουμε για την τετραγωνική μορφή (Bx, x) ότι $(Bx, x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n}(x, e_i)(x, e_j)(Be_i, e_j)$ και άρα

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(Bx, x)d\rho_k(x) &= \sum_{i,j=1}^{n}(Be_i, e_j)\int_{\mathbb{R}^n}(x, e_i)(x, e_j)d\rho_k(x)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(Be_i, e_j)(A_k e_i, e_j)\end{aligned}$$

Όμως από την (2) φαίνεται ότι

$$(A_k e_i, e_j) = 0 \quad \text{όταν} \quad i \neq j \quad \text{και ότι} \quad (A_k e_i, e_i) = \begin{cases}(e_i, y_i)^2 & , i \leq m \\ k^2 & , i > m\end{cases}$$

Επιπλέον $Be_i = 0$ όταν $i = m+1, ..., n$ και άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Bx, x)d\rho_k(x) = \sum_{i=1}^{m}(Be_i, e_i)(e_i, y_i)^2$$

Αλλά $e_i = \sqrt{\lambda_i}y_i$ για $i = 1, ..., m$ και τελικά

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Bx, x)d\rho_k(x) = \sum_{i=1}^{m}(By_i, y_i) \tag{4}$$

Τώρα από τη μορφή της $\hat{\rho}_k$ διαπιστώνουμε ότι

$$\nu(\{x : \rho_k(x) < e^{-\frac{1}{2}}) = \nu(\{x : (A_k x, x) > 1\})$$

και επικαλούμενοι το Λήμμα 6.2.6. (με $\theta = e^{-\frac{1}{2}}$) έχουμε

$$\nu(\{x : (A_k x, x) > 1\}) \leq \frac{\theta}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^n}(1 - \hat{\nu}(t))d\rho_k(t)$$

Το δεύτερο μέλος από υπόθεση φράσσεται εκ των άνω από την $\frac{\theta}{1-\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n}[\epsilon + (Bt, t)]d\rho_k(t)$ και επειδή $\theta = e^{-\frac{1}{2}}$ οπότε $\frac{\theta}{1-\theta} \leq 3$ θα έχουμε λόγω της (4)

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^n : (A_k x, x) > 1\}) \leq 3(\epsilon + \sum_{i=1}^{m}(By_i, y_i)) \tag{5}$$

Επικαλούμενοι τώρα τις (3),(5) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\nu(\mathbb{R}^n \setminus E^\circ) &= \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R}^n : (A_k x, x) > 1\}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \nu(\{x \in \mathbb{R}^n : (A_k x, x) > 1) \\
&\leq 3(\epsilon + \sum_{i=1}^{m}(By_i, y_i))
\end{aligned}$$

□

6.3 Το θεώρημα Minlos και το θεώρημα Sazonov

Προκειμένου να αναπτύξουμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα αυτού του Κεφαλαίου είναι απαραίτητα δύο ακόμα Λήμματα, καθεαυτά αποτελέσματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Λήμμα 6.3.1. *Έστω χώρος Hilbert H και S ένας τελεστής* ***συμμετρικός, θετικός, πυρηνικός*** *στον H. Τότε ο τελεστής S μπορεί να αναπαρασταθεί ως $S = u \circ S_1 \circ u'$ όπου $S_1 : H \mapsto H$ είναι επίσης συμμετρικός,θετικός και πυρηνικός ενώ ο $u : H \mapsto H$ είναι (γραμμικός, συνεχής)* ***συμπαγής****.*

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικός συμμετρικός,θετικός τελεστής $A : H \mapsto H$ εις τρόπον ώστε $S = A' \circ A$ (πρόκειται για την τετραγωνική ρίζα του S). Επίσης είναι γνωστό ότι ο (πυρηνικός) S είναι συμπαγής αφού για τις ιδιοτιμές του ισχύει $\sum_n \lambda_n < \infty$. Συνεπώς ο τελεστής A είναι επίσης Hilbert-Smith και συμπαγής αφού $\sum_n (\sqrt{\lambda_n})^2 < \infty$. Αυτό το τελευταίο γνώρισμα του A καθιστά δυνατή την παραγοντοποίησή του σε $A = v \circ w$ όπου $w : H \mapsto H$ συμπαγής και $v : H \mapsto H$ είναι Hilbert-Smith συμμετρικός θετικός ([15] σελ. 217) Ασφαλώς $A' = w' \circ v'$.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "S"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, "A"] & & H \\
{} \arrow[r, "v"'] & H \arrow[ur, "A'"] \arrow[r, "v'"'] & H \arrow[u, "w'"']
\end{tikzcd}$$

Αν θέσουμε τώρα $S_1 = v \circ v'$ τότε προφανώς ο $S_1 : H \mapsto H$ είναι συμμετρικός, θετικός και πυρηνικός. ([15] σελ.224). Από την άλλη ο $w : H \mapsto H$ συμπαγής και $S = w' \circ S_1 \circ w$. Θέτοντας $w' = u$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Λήμμα 6.3.2. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. X με τοπολογία ξ και $X' = (X, \xi)'$ ο δυϊκός του. Έστω ο τελεστής $R \in \mathcal{R}(X', X)$. Τότε είναι δυνατόν να είναι*

$R = w \circ S \circ w'$ με $S \in \mathbf{S}(H)$ και $w : H \mapsto X$ γραμμικό τελεστή, συνεχή και συμπαγή για τις τοπολογίες $\tau(\| \|) - \mathscr{C}(X, X')$ όπου $\tau(\| \|)$ η τοπολογία η παραγόμενη από τη norm του χώρου Hilbert H.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $\mathcal{R}(X', X)$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας χώρος Hilbert H ,τελεστής $S_1 \in \mathbf{S}(H)$ και γραμμική,συνεχής (για την $\tau(\| \|)$ και ξ) $v : H \mapsto X$ με $R = v \circ S_1 \circ v'$. Η ισχυρή συνέχεια της v συνεπάγεται την ασθενή $\sigma(H, H') - \sigma(X, X')$ συνέχεια και αφού ο H είναι ανακλαστικός και άρα το υποσύνολο $B = \{h \in H : \|h\| \leq 1\} \subset H$ είναι $\sigma(H, H')$-συμπαγές θα έχουμε ότι το σύνολο $v(B)$ είναι $\sigma(X, X')$-συμπαγές. Από την άλλη το σύνολο $v(B)$ είναι κυρτό,ισόρροπο (διότι είναι το B) οπότε θα είναι και $\mathscr{C}(X, X')$-φραγμένο (Robertson Robertson σελ. 71). Από το τελευταίο συμπεραίνουμε ότι η $v : H \mapsto X$ είναι $\tau(\| \|) - \mathscr{C}(X, X')$ συνεχής. Σύμφωνα τώρα με το Λήμμα 6.3.1. ο τελεστής S_1 γράφεται $S_1 = u \circ S \circ u'$ όπου $S \in \mathbf{S}(H)$ και $u : H \mapsto H$ γραμμικός, συνεχής συμπαγής. Αν λοιπόν θέσουμε $w = v \circ u$ τότε ο w είναι γραμμικός, συνεχής και συμπαγής και βέβαια $R = w \circ S \circ w'$.

□

Θεώρημα 6.3.3. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. με τοπολογία ξ και δυϊκό $X' = (X, \xi)'$. Τότε:*

1. *Έστω μ κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας ορισμένο στην κυλινδρική άλγεβρα $C(X, X')$ του οποίου το χ.σ. $\hat{\mu} : X' \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X', X)$. Τότε το κυλινδρικό μέτρο μ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε ένα $\mathscr{C}(X, X')$- κανονικό μέτρο στον X.*

2. *Έστω $\mathcal{X} : X' \mapsto \mathbb{C}$ θετικά ορισμένο συναρτησοειδές με $\mathcal{X}(0) = 1$ και συνεχές ως προς την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X', X)$. Τότε υπάρχει $\mathscr{C}(X, X')$-κανονικό μ στον X εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Το μέτρο μ είναι μοναδικό.*

Απόδειξη.

1. Έστω τυχόν $\epsilon > 0$. Από τη συνέχεια στο μηδέν της $\mathcal{X}$ για την τοπολογία $\tau_S(X', X)$ συνέγεται ότι υπάρχει περιοχή $V_\epsilon = \{x' \in X' :< R_\epsilon x', x' >< 1\}$ του μηδενός με $R_\epsilon \in \mathcal{R}(X', X)$ ώστε:

   $$|1 - \hat{\mu}(x')| < \frac{\epsilon}{6} \quad \text{όταν} \quad x' \in V_\epsilon$$

   Επειδή $|1 - \hat{\mu}(x')| \leq 2$ για κάθε $x' \in X'$ θα είναι και $|1 - \hat{\mu}(x')| \leq 2 < Rx', x, >$ όταν $< Rx', x' > \geq 1$ και τελικά

   $$|1 - \hat{\mu}(x')| < \frac{\epsilon}{6} + 2 < Rx', x' > \quad \text{για κάθε} \quad x' \in X' \tag{1}$$

   Σύμφωνα με το Λήμμα 6.3.2. ο τελεστής $R_\epsilon \in \mathcal{R}(X', X)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $R_\epsilon = u \circ S \circ u'$ όπου $S \in \mathbf{S}(H), H$ χώρος Hilbert και $u : H \mapsto X$ γραμμικός,συνεχής **συμπαγής** για τις τοπολογίες $\tau(\| \|) - \mathscr{C}(X, X')$. Θέτουμε

   $$M = \{u(x) : \|x\| \leq r\}$$

Κατά τα παραπάνω το σύνολο $\bar{M} \subset X$ είναι $\mathscr{C}(X,X')$-συμπαγές. Τώρα για τυχόντα $n \in \mathbb{N}$ και $\{x'_1,...,x'_n\} \subset X'$ ορίζεται η $f : X \mapsto \mathbb{R}^n$ με την $f(x) = (x'_1(x),...,x'_n(x))$ και θέτουμε $\quad a = f \circ u \quad b = a\sqrt{S} \quad$ και $A = aa' \quad B = bb'$
Οι τελεστές $A, B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ είναι συμμετρικοί,θετικοί και προφανώς $\{y \in \mathbb{R}^n : Ay = 0\} \subset \{y \in \mathbb{R}^n : By = 0\}$
Επίσης αν $\lambda_1,...,\lambda_m$ είναι μη-μηδενικές ιδιοτιμές και $e_1,...,e_m$ αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A και $y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}e_i, i = 1,...,m$ τότε το $\{a'y_1,...,a'y_m\}$ είναι ορθοκανονικό σύστημα στον H αφού (από τον ορισμό της συζυγούς)

$$(a'y_i, a'y_j) = (aa'y_i, y_j) = (Ay_i, y_j) = \frac{1}{\lambda}(Ae_i, e_j) = (e_i, e_j) \text{ για } i = 1,...,m.$$

Συνέπεια αυτού του τελευταίου είναι ότι (δες Άσκηση 44 παρακάτω)

$$E^\circ \subset f(M) \tag{2}$$

όπου $E = \{y \in \mathbb{R}^n : (Ay, y) \leq \frac{1}{r^2}\}$ και E° το πολικό του.
Τώρα ορίζουμε το μέτρο v_f στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ μέσω της

$$v_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$$

Γράφοντας $y \cdot f = y_1x'_1 + ... + y_nx'_n$ για τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$ και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής παίρνουμε την

$$\hat{\mu}(y \cdot f) = \hat{v}_f(y) \quad , y \in \mathbb{R}^n$$

και από την (1) συνάγουμε

$$|1 - \hat{v}_f(y)| \leq \frac{\epsilon}{6} + 2 \cdot < Ry \cdot f, y \cdot f > \quad , y \in \mathbb{R}^n$$

Όμως εύκολα διαπιστώνεται (δες Άσκηση 45)

$$< Ry \cdot f, y \cdot f > = < By, y > \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

και άρα

$$|1 - \hat{v}_f(y)| \leq \frac{\epsilon}{6} + 2 < By, y > \quad , y \in \mathbb{R}^n$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Λήμματος Minlos για το μέτρο πιθανότητας v_f και τους τελεστές A, B και συνεπώς

$$v_f(\mathbb{R}^n \setminus E^\circ) \leq 3(\frac{\epsilon}{6} + \frac{2}{r^2}\sum_{k=1}^{m}(By_k, y_k)) \tag{4}$$

Είναι όμως $\sum\limits_{k=1}^{m}(By_k, y_k) = \sum\limits_{k=1}^{m}(aSa'y_k, y_k) = \sum\limits_{k=1}^{m}(S(a'y_k), a'y_k) \leq trS$ διότι όπως είδαμε παραπάνω τα $\{a'y_k, k = 1,...m\} \subset H$ είναι ορθοκανονικό σύστημα. Συνεπώς από την (4) συνάγεται ότι

$$v_f(\mathbb{R}^n \setminus E^\circ) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{6}{r^2}trS$$

και επιλέγοντας $r > 0$ εις τρόπον ώστε $r^2 > \frac{12}{\epsilon} trS$ αφενός και λαμβάνοντας υπόψη την (2) αφετέρου, έχουμε

$$v_f(\mathbb{R}^n \setminus f(\bar{M})) < \epsilon$$

και τούτο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f = (x'_1, ..., x'_n), x'_i \in X'$.
Επικαλούμενοι τώρα την Άσκηση 41 διαπιστώνουμε ότι ισχύει η συνθήκη Prohorov του Θεωρήματος 4.4.11. με $K = \bar{M}$ που είναι $\mathscr{C}(X, X')$-συμπαγές και $\Gamma = X' \subset C(X, \mathbb{R})$. Αρκεί λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα αυτό στον τοπικά κυρτό τ.δ.χ. $(X, \mathscr{C}(X, X'))$.

2. Αφού ο τοπολογικός χώρος $(X', \tau_S(X', X))$ είναι τοπικά κυρτός διανυσματικός χώρος και η συνάρτηση $\mathcal{X} : X' \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής σε αυτόν, θα είναι και ψευδοσυνεχής, δηλαδή: **συνεχής σε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του** X'. Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα 5.2.4. (με $\Gamma = X'$) υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στον X με χ.σ. $\hat{\mu} = \mathcal{X}$ συνεχές (πάντα) για την τοπολογία Sazonov. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε το (1).

□

Παρατήρηση 6.3.4. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.4.1. το $\mathscr{C}(X, X')$-κανονικό μέτρο μ είναι ξ-κανονικό.

Άσκηση 44. Επαληθεύστε την (2) της απόδειξης.

Υπόδειξη: Από το Λήμμα 6.2.5. και όπως ακριβώς για το Λήμμα Minlos $E^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{m}(x, y_i)^2 \leq r^2$ και $\sum_{i=m+1}^{n}(x, e_i)^2 = 0\}$ Έτσι τυχόν $x \in E^\circ$ γράφεται $x = \sum_{i=1}^{m}(x, e_i)e_i$. Χρησιμοποιώντας τις $Ae_i = \lambda_i e_i$ και $A = aa'$ έχουμε διαδοχικά: $x = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}(x, aa'(e_i))aa'(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}(a'(x), a'(e_i))aa'(e_i) = a(h)$ όπου $h = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}(a'(x), a'(e_i))a'(e_i)$ και αφού $e_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$ το $h = \sum_{1}^{m} \frac{1}{\lambda_i}(a'(x), a'(y_i))a'(y_i)$. Όμως τα $a'(y_i), i = 1, ..., m$ είναι ορθοκανονικά και άρα $\|h\|^2 = \sum_{1}^{m} \frac{1}{\lambda_i}^2 (a'(x), a'(y_i))^2 = \sum_{1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}(x, aa'(y_i))^2 = \sum_{1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}(x, A(y_i))^2 = \sum_{1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}(x, \lambda_i y_i)^2 = \sum_{1}^{m}(x, y_i)^2 \leq r^2$ αφού $x \in E^\circ$. Ώστε $x = a(h)$ με $\|h\|^2 \leq r^2$. Όμως $a = f \circ u$.

Άσκηση 45. Επαληθεύστε την (3) της απόδειξης. Επισημαίνεται ότι $a = f \circ u$ και $aSa' = B$ από τον ορισμό του B.

Υπόδειξη: Για $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $f = (x'_1, ..., x'_n)$ είναι $< Ry \cdot f, y \cdot f >= \sum_{i,j} y_i y_j < Rx'_i, x'_j >$. Εξάλλου $< By, y >= \sum_{i,j} y_i y_j < Bv_i, v_j >$ όπου $\{v_i\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$.Θα δείξουμε τώρα ότι $u'(x'_i) = a'(v_i)$ για $i = 1, ..., n$. Πράγματι η σχέση αυτή ισοδυναμεί με $(x, u'(x'_i)) = (x, (f \circ u)'(v_i)) \forall x \in H \Leftrightarrow < u(x), x'_i >=$

$((f \circ u)(x), v_i) \forall x \in H \Leftrightarrow x_i'(u(x)) = x_i'(u(x)) \forall x \in H$ που αληθεύει. Συνεπώς έχουμε $< Rx_i', x_j' >=< uS(u'(x_i')), x_j' >=< uSa'(v_i), x_j' >=< uSa'(v_i), \pi_j \circ f >= \pi_j \circ f(u \cdot Sa'(v_i)) = \pi_j(aSa'(v_i)) = \pi_j(Bv_i) =< Bv_i, v_j >$ όπου $\pi_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ η συνήθης i-προβολή.

Ισχύει το αντίστροφο του (2) τμήματος του παραπάνω Θεωρήματος;
Η απάντηση είναι ΟΧΙ εν γένει. Εν τούτοις στην περίπτωση που ο χώρος X είναι Hilbert ισχύει. Στη συνέχεια εξετάζουμε αυτό ακριβώς το ζήτημα.

Έστω λοιπόν ότι ο χώρος X είναι **χώρος Hilbert**. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή το σύνολο $\mathcal{R}(X', X)$ συμπίπτει με το σύνολο των συμμετρικών, θετικών και πυρηνικών τελεστών $R : X \mapsto X$ και προφανώς συμπίπτει με το σύνολο $\mathbf{S}(X)$. Η τοπολογία Sazonov στην περίπτωση ενός χώρου Hilbert X θα σημειώνεται απλά $\tau_S(X)$ και είναι προφανές ότι συμπίπτει με την ασθενέστερη τοπολογία που καθιστά συνεχείς όλες τις τετραγωνικές μορφές $x \mapsto (Rx, x), R \in \mathbf{S}(X)$.
Προκειμένου να δείξουμε το θεώρημα Sazonov που είναι το σημαντικό αποτέλεσμα προς την κατεύθυνση που συζητούμε θα χρειαστούμε την έννοια του τελεστή συσχέτισης ενός μέτρου πιθανότητας.

Ορισμός 6.3.5. *Έστω μ κανονικό μέτρο πιθανότητας στον χώρο Hilbert X που ικανοποιεί την απαίτηση $\int\limits_X \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$. Ονομάζεται **τελεστής συσχέτισης** του μέτρου μ ο τελεστής $S : X \mapsto X$ που ορίζεται από την διγραμμική μορφή*

$$r_\mu(x, y) = \int_X (u, x)(u, y) d\mu(u)$$

δηλαδή από την $(Sx, y) = r_\mu(x, y) \quad x, y \in X$.

Λήμμα 6.3.6. *Έστω μ κανονικό μέτρο πιθανότητας στο χώρο Hilbert X που ικανοποιεί την $\int\limits_X \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$. Τότε ο τελεστής συσχέτισης S του μέτρου μ είναι θετικός,συνεχής και πυρηνικός.*

Απόδειξη. Η συμμετρία και η θετικότητα είναι προφανείς και η συνέχεια συνέπεια της πρώτης (δες Πρόταση 6.1.3.).
Έστω τώρα τυχόν ορθοκανονικό σύστημα $\{e_i, i \in I\} \subset X$. Επειδή για οποιοδήποτε αριθμήσιμο υποσύστημα $e_{i_n}, n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum\limits_n (Se_{i_n}, e_{i_n}) = \sum\limits_n \int\limits_X ((u, e_n)^2 d\mu(u) \leq \int\limits_X \|u\|^2 d\mu(u) < \infty$ συμπεραίνουμε ότι τα σύνολα $\{i : (Se_i, e_i) > \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένα και άρα $(Se_i, e_i) > 0$ μέχρι και για αριθμήσιμο πλήθος δεικτών $i \in I$. Επιπλέον $\sum\limits_{i \in I} (Se_i, e_i) = \sum\limits_i \int (u, e_i)^2 d\mu(u) = \int \|u\|^2 d\mu(u) < \infty$. Υπό αυτές τις συνθήκες ο τελεστής S είναι πυρηνικός.(δες [16] σελ. 161)

□

Θεώρημα 6.3.7. *(Sazonov)*
Έστω X χώρος Hilbert. Ένα συναρτησοειδές $\mathcal{X} : H \mapsto \mathbb{C}$ είναι χαρακτηριστικό

συναρτησοειδές ενός κανονικού μέτρου πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$ όταν και μόνο όταν το $\mathcal{X}$ είναι θετικά ορισμένο με $\mathcal{X}(0) = 1$ και συνεχές για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X)$.

Απόδειξη. Ότι η συνθήκη είναι ικανή είναι άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενου θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι είναι και αναγκαία. Θα δείξουμε δηλαδή ότι το χ.σ. $\hat{\mu}(x) = \int\limits_X e^{i(x,t)} d\mu(t), x \in X$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $x = 0$ για την τοπολογία $\tau_S(X)$.
Έστω τυχόν $\epsilon > 0$ και συμπαγές $K = K_\epsilon \subset X$ με $\mu(K) > 1 - \frac{\epsilon}{4}$. Ορίζουμε στον $(X, \mathscr{B}(X))$ το μέτρο $\mu_\epsilon(B) = \frac{\mu(B \cap K)}{\mu(K)}$. Τότε $\mu_\epsilon(K) = 1$ και προφανώς $\int\limits_X \|u\|^2 d\mu_\epsilon(u) < +\infty$. Έχουμε διαδοχικά

$$|1 - \hat{\mu}(x)| \leq |\mu(K) - \int_K e^{i(x,t)} d\mu(t)| + \int_{K^c} |1 - e^{i(x,t)}| d\mu(t)$$

και επειδή $\mu(L) = \mu(K)\mu_\epsilon(L)$ για κάθε $L \subset K_\epsilon$ και $|1 - e^{-i(x,t)}| \leq 2$ για κάθε $t \in X$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} |1 - \hat{\mu}(x)| &\leq |\mu(K) - \mu(K) \int_K e^{i(x,t)} d\mu_\epsilon(t)| + 2\mu(K^c) \\ &= \mu(K)|1 - \hat{\mu}_\epsilon(x)| + 2\mu(K^c) \end{aligned}$$

και αφού $\mu(K^c) < \frac{\epsilon}{4}, \mu(K) \leq 1$

$$|1 - \hat{\mu}(x)| < |1 - \hat{\mu}_\epsilon(x)| + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in X \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας τη στοιχειώδη ανισότητα $|1 - e^{iy}| < 2|y|, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$|1 - \hat{\mu}_\epsilon(x)| \leq \int_X 2|(x,t)| d\mu_\epsilon(t) \leq \int 4(x,t)^2 d\mu_\epsilon(t) \tag{2}$$

Αν τώρα S_ϵ είναι ο τελεστής συσχέτισης του μέτρου μ_ϵ τότε κατά το Λήμμα που προηγήθηκε ανήκει στο $\mathbf{S}(X)$ και αφετέρου $(S_\epsilon x, x) = \int\limits_X (x,t)^2 d\mu_\epsilon(t)$ οπότε από τις (1),(2) συμπεραίνουμε

$$|1 - \hat{\mu}(x)| < 4(S_\epsilon x, x) + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in X$$

Αν τώρα θεωρήσουμε την περιοχή του μηδενός της τοπολογίας Sazonov $V = \{x \in X : (S_\epsilon x, x) < \frac{\epsilon}{8}\}$ τότε

$$|1 - \hat{\mu}(x)| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in V$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί επέκταση του Θεωρήματος Sazonov σε χώρους Banach αλλά από την άλλη αφορά μόνο σε μέτρα πιθανότητας με Χιλμπερτιανό φορέα, δηλαδη:

Ορισμός 6.3.8. *Έστω χώρος Banach X και κανονικό μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{B}(X))$. Λέγεται ότι το μέτρο μ έχει* **Χιλμπερτιανό** *φορέα όταν και μόνο όταν υπάρχει χώρος Hilbert H και συνεχής γραμμικός τελεστής $u : H \mapsto X$ και κανονικό μέτρο πιθανότητας v στον $(H, \mathscr{B}(H))$ εις τρόπον ώστε να είναι*

$$\mu(B) = v(u^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathscr{B}(X)$$

ή όπως γράφεται συμβολικά $\mu = v \circ u^{-1}$.

Όταν τα πράγματα έχουν όπως παραπάνω τότε $u(H)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(u(x), u(y)) = (x, y)$ και $\mu(u(H)) = 1$.
Παραθέτουμε τώρα ένα σχετικό αποτέλεσμα και παραπέμπουμε στο [16] για την απόδειξή του (σελ.368).

Θεώρημα 6.3.9. *Έστω X χώρος Banach και συνάρτηση $\mathcal{X} : X' \mapsto \mathbb{C}$.*
Τότε οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:

1. *Η $\mathcal{X}$ είναι χ.σ. ενός κανονικού μέτρου πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{B}(X))$ με Χιλμπερτιανό φορέα.*

2. *Η $\mathcal{X}$ είναι θετικά ορισμένη με $\mathcal{X}(0) = 1$ και $\tau_S(X', X)$-συνεχής.*

Θα συζητήσουμε στη συνέχεια με μάλλον εισαγωγικό τρόπο την έννοια της **συμπύκνωσης** στα κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας και θα παραθέσουμε ένα σχετικό αποτέλεσμα. Ο ενδιαφερόμενος για την προσέγγιση των θεμάτων που προηγήθηκαν με τη βοήθεια της έννοιας αυτής παραπέμπεται στο [15].
Προκειμένου να απλοποιήσουμε τις διατυπώσεις συνθηκών και ισχυρισμών θα εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό:
Αν μ είναι μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$ και $f : X \mapsto \mathbb{R}$ είναι $\mathscr{B}$-μετρήσιμη τότε το μέτρο ν στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ το οριζόμενο από την $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ θα γράφεται συμβολικά μ_f.

Ορισμός 6.3.10. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και X' ο δυϊκός του. Έστω κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, C(X, X'))$ και $\mathscr{A}$ κλάση $\sigma(X, X')$-φραγμένων υποσυνόλων του X. Θα λέγεται ότι το κυλινδρικό μέτρο μ είναι* **βαθμωτά συμπυκνωμένο** *στην $\mathscr{A}$ όταν και μόνο όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathscr{A}$ τέτοιο ώστε $(\mu_{x'})^*(x'(A)) > 1 - \epsilon$ για κάθε $x' \in X'$.*

Έστω τώρα $\mathscr{A}$ μια κλάση $\sigma(X, X')$-φραγμένων υποσυνόλων του X που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

Α'. Αν $A \in \mathscr{A}$ και $\lambda > 0$ τότε $\lambda A \in \mathscr{A}$

Β′. Αν $A, B \in \mathscr{A}$ τότε υπάρχει $E \in \mathscr{A}$ με $A \cup B \subset E$

Γ′. Αν $A \in \mathscr{A}$ τότε υπάρχει ισόρροπο $B \in \mathscr{A}$ με $A \subset B$.

Για κάθε $A \in \mathscr{A}$ ορίζουμε $\rho_A(x') = \sup\{|x'(x)| : x \in A\}, x' \in X$. Τότε η ρ_A ορίζει seminorm στον X' και η οικογένεια seminorm $(\rho_A, A \in \mathscr{A})$ ορίζει τοπικά κυρτή τοπολογία στον διανυσματικό χώρο X'. Η τοπολογία αυτή θα αποκαλείται $\mathscr{A}$-τοπολογία και θα γράφεται $\tau_{\mathscr{A}}(X', X)$. Είναι φανερό ότι $\tau_{\mathscr{A}}(X', X) \subset \mathscr{C}(X', X)$.

Θεώρημα 6.3.11. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και X' ο δυϊκός του. Έστω μ κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στον $(X, C(X, X'))$ και $\mathscr{A}$ κλάση $\sigma(X, X')$-φραγμένων υποσυνόλων του X που ικανοποιούν τις (Α′),(Β′),(Γ′) όπως παραπάνω. Οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *μ είναι βαθμωτά συμπυκνωμένο στην $\mathscr{A}$*

2. *$\hat{\mu}$ είναι συνεχής για την $\tau_{\mathscr{A}}(X', X)$.*

Απόδειξη. Δες [15] σελ. 193 ή [16] σελ. 412 □

6.4 Μέτρα πιθανότητας και χ.σ. σε δυϊκούς χώρους

Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και X' ο δυϊκός του. Η κυλινδρική άλγεβρα του X' όπως είδαμε ήδη ορίζεται ως

$$C(X', X) = \bigcup_{i \in I} \mathscr{A}'_i$$

όπου $I = \{(x_1, ..., x_n) : n \in \mathbb{N}, x_i \in X\}$ και για τυχόν $i = (x_1, ..., x_n) \in I$ η σ-άλγεβρα $\mathscr{A}'_i = \{g^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^n\}$ με $g(x') = (<x_1, x'>, ..., <x_n, x'>), x' \in X'$. Η κυλινδρική σ-άλγεβρα $\hat{C}(X', X) = \sigma(\bigcup_{i \in I} \mathscr{A}'_i)$.
Αν τώρα μ είναι κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στην $C(X', X)$ τότε το χαρακτηριστικό συναρτησοειδές του μ ορίζεται στον X ως ακολούθως

$$\hat{\mu}(x) = \int_{X'} e^{i<x,x'>} d\mu(x') \quad , x \in X$$

με το ολοκλήρωμα νοούμενο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{A}'_x, \mu)$ για έκαστο $x \in X$. Με τον ίδιο τύπο ορίζεται και το χ.σ. οποιουδήποτε μέτρου πιθανότητας ορισμένου σε σ-άλγεβρα που εγκλείει την $C(X', X)$.
Ανάλογα ορίζεται το σύνολο των τελεστών $\mathcal{R}(X, X')$ ως το σύνολο των τελεστών $R : X \mapsto X'$ για έκαστο των οποίων υπάρχει χώρος Hilbert H και γραμμική συνεχής $v : X \mapsto H$ με $R = v'Sv$ όπου $S \in \mathbf{S}(H)$.

Η τοπολογία Sazonov $\tau_S(X,X')$ στον χώρο X ορίζεται ως η τοπικά κυρτή τοπολογία που προκύπτει από την οικογένεια seminorm $\{\rho_R, R \in \mathcal{R}(X,X')\}$ όπου $\rho_R(x) = \sqrt{<x,Rx>}, x \in X$. Το δυϊκό του Θεωρήματος 6.3.3. έχει ως ακολούθως:

Θεώρημα 6.4.1. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ και X' ο δυϊκός του.*

1. *Έστω κυλινδρικό μέτρο μ στον $(X', C(X',X))$ του οποίου το χ.σ. $\hat{\mu}(x)$ $x \in X$ είναι συνεχής συνάρτηση για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X,X')$. Τότε το κυλινδρικό μέτρο μ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε $\mathscr{C}(X',X)$-κανονικό μέτρο στον X'.*

2. *Έστω $\mathcal{X} : X \mapsto \mathbb{C}$ θετικά ορισμένη συνάρτηση με $\mathcal{X}(0) = 1$ και συνεχής για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X,X')$. Τότε υπάρχει $\mathscr{C}(X',X)$-κανονικό μέτρο μ στον X' εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Το μέτρο μ είναι μοναδικό.*

Απόδειξη.

1. Έστω ο χώρος $Y = (X', \tau(X',X))$ όπου $\tau(X',X)$ η τοπολογία Mackey του X'. Κατά το θεώρημα Mackey-Arens ο δυϊκός Y' του Y ταυτίζεται με το χώρο του X και συνεπώς το χ.σ. $\hat{\mu}$ ορίζεται στον Y'. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\hat{\mu}$ είναι συνεχής συνάρτηση για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(Y',Y)$ και να επικαλεστούμε το Θεώρημα 6.3.3. για το ζεύγος (Y,Y'). Αν X_τ είναι ο χώρος X εφοδιασμένος με την τοπολογία Mackey $\tau(X,X')$ τότε από τον ορισμό του Y και την ταύτιση Y' και X συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{R}(Y',Y) = \mathcal{R}(X_\tau, X')$ και συνεπώς $\tau_S(Y',Y) = \tau_S(X_\tau, X')$.
   Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\hat{\mu}$ είναι συνεχής συνάρτηση για την $\tau_S(X_\tau, X')$. Όμως $\mathcal{R}(X,X') \subset \mathcal{R}(X_\tau,X')$ διότι για $R \in \mathcal{R}(X,X')$ είναι $R = v'Sv$ όπου $v : X \mapsto H$ συνεχής για την αρχική τοπολογία του X και την $\tau(\|\ \|)$ του χώρου Hilbert H και συνεπώς $\tau(X,X') - \tau(\|\ \|)$ συνεχής αφού η αρχική τοπολογία του X είναι ασθενέστερη της Mackey. Από τον παραπάνω εγκλεισμό συμπεραίνουμε ότι $\tau_S(X,X') \subset \tau_S(X_\tau,X')$ και αφού από υπόθεση η $\hat{\mu}$ είναι συνεχής για την $\tau_S(X,X')$ θα είναι συνεχής και για την $\tau_S(X_\tau,X')$, πράγμα που επιδιώκαμε να δείξουμε.

2. Όπως για το (2) του Θεωρήματος 6.3.3. και επικαλούμενοι δυϊκό αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.2.4. (που ισχύει).

□

Παραθέτουμε τέλος το καθεαυτό Θεώρημα Minlos (για μέτρα στον X') και το οποίο αναφέρεται σε χώρους X που είναι **πυρηνικοί** (nuclear).

Ορισμός 6.4.2. *Έστω E, F χώροι Banach και $u : E \mapsto F$ γραμμικός, συνεχής τελεστής. Ο τελεστής u λέγεται* **πυρηνικός** *όταν και μόνο όταν υπάρχουν $\{x'_k, k \in \mathbb{N}\} \subset E'$ και $\{y_k, k \in \mathbb{N}\} \subset F$ με $\sum_k \|x'_k\|\|y_k\| < \infty$ εις τρόπον ώστε να ισχύει*

$$u(x) = \sum_k <x, x'_k> y_k \quad , x \in E.$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση όπου $E = F = H$ όπου H Hilbert τότε ο ορισμός του πυρηνικού τελεστή συμπίπτει με αυτόν του Ορισμού 6.2.1.

Ορισμός 6.4.3. *Ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ X ονομάζεται* **πυρηνικός** *όταν και μόνο όταν για κάθε γραμμικό συνεχή τελεστή T από τον X σε ένα Banach χώρο E υπάρχει χώρος Banach F, τελεστής γραμμικός, συνεχής $u_1 : X \mapsto F$ και τελεστής πυρηνικός $u_2 : F \mapsto E$ εις τρόπον ώστε $T = u_2 \circ u_1$.*

Αποδεικνύεται (δες Schaeffer, H. Topological Vector Spaces) ότι η τοπολογία ενός πυρηνικού χώρου συμπίπτει με την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X, X')$ και συνεπώς από το αμέσως προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει το παρακάτω:

Θεώρημα 6.4.4. *(Minlos)*
Έστω πυρηνικός χώρος X και X' ο δυϊκός του. Τότε:

1. *Αν μ είναι κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στον $(X', C(X', X))$ του οποίου το χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε το μ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε $\mathscr{C}(X', X)$-κανονικό μέτρο στον X'.*

2. *Αν $\mathcal{X} : X \mapsto \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένη,* ***συνεχής*** *με $\mathcal{X}(0) = 1$ τότε υπάρχει $\mathscr{C}(X', X)$-κανονικό μέτρο πιθανότητας μ εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Το μέτρο μ είναι μοναδικό.*

Πόρισμα 6.4.5. Έστω X μετρικός πυρηνικός χώρος και X' ο δυϊκός του. Η συνάρτηση $\mathcal{X} : X \mapsto \mathbb{C}$ είναι το χ.σ. ενός $\mathscr{C}(X', X)$-κανονικού μέτρου πιθανότητας στον X' όταν και μόνο όταν η $\mathcal{X}$ είναι θετικά ορισμένη, συνεχής και $\mathcal{X}(0) = 1$.

Απόδειξη. Το ικανό των συνθηκών επί της $\mathcal{X}$ είναι το (2) του Θεωρήματος αν λάβουμε υπόψη ότι η τοπολογία του πυρηνικού χώρου X συμπίπτει με την τοπολογία Sazonov . Το αναγκαίο προκύπτει από το γεγονός ότι για $x_n \to x$ θα είναι και $< x_n, x' > \longrightarrow < x, x' >$ για κάθε $x' \in X'$. Επιπλέον $|e^{i<x,x'>}| = 1$ και άρα $\hat{\mu}(x_n) \to \hat{\mu}(x)$. Επειδή όμως X μετρικός η ακολουθιακή συνέχεια συνεπάγεται την συνέχεια της $\mathcal{X} = \hat{\mu}$.

□

Παρατήρηση 6.4.6.

1. Πυρηνικοί χώροι είναι π.χ. οι $\mathscr{D}(V), \mathscr{D}'(V), \mathscr{E}(V), \mathscr{E}'(V), \Phi(V), \Phi'(V), V$ ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ της θεωρίας Κατανομών. Ένας χώρος Hilbert H με την τοπολογία $\tau_S(H)$ **δεν** είναι πυρηνικός.(δες [16] σελ. 411)

2. Το παραπάνω Πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που ο χώρος X είναι barelled (tonellé). Δες [18].

Κεφάλαιο 7

Μέτρα Πιθανότητας Gauss

7.1 Μέτρα Πιθανότητας Gauss στον $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ το μέτρο ρ το οριζόμενο από την

$$\rho(B) = \int_B (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx \quad , B \in \mathscr{B}^n$$

Πρόκειται βέβαια για το κανονικό μέτρο πιθανότητας με χ.σ.

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|^2} \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Ορισμός 7.1.1. *Έστω $a \in \mathbb{R}^n$ και μη-αρνητικός συμμετρικός $n \times n$-πίνακας Σ. Ονομάζεται **μέτρο Gauss στον** $\mathbb{R}^n$ με παραμέτρους a, Σ το μέτρο μ το οριζόμενο στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ από την*

$$\mu(B) = \rho(T^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$$

όπου $T(x) = a + \Sigma^{\frac{1}{2}} x \quad , x \in \mathbb{R}^n$. Είναι φανερό ότι το μέτρο ρ είναι Gauss με παραμέτρους $a = 0$ και $\Sigma = I$.

Όταν ο πίνακας Σ είναι **θετικά ορισμένος** τότε η απεικόνιση Τ είναι $1-1$ και συνεπώς $T^{-1}(B) = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(B - a)$.
Στην περίπτωση αυτή και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(y - a)$έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \int_{T^{-1}(B)} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx \\ &= \int_B (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}(y-a), y-a)} dy\end{aligned}$$

και ώστε όταν Σ θετικά ορισμένος το μέτρο Gauss με παραμέτρους a, Σ έχει πυκνότητα

$$d(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}(y-a), y-a)} \quad , y \in \mathbb{R}^n$$

Όταν ο Σ είναι **εκφυλισμένος** (δηλαδή $(\Sigma x, x) = 0$ για κάποιο $x \neq 0$) τότε το αντίστοιχο μέτρο Gauss **δεν** έχει πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue (είναι τότε δυνατόν να βρούμε υποσύνολο A με $A \cap T(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ και θετικό μέτρο Lebesgue οπότε $\mu(A) = \rho(T^{-1}(A)) = \rho(\emptyset) = 0$).
Αν τώρα γράψουμε φ την απεικόνιση που ορίζει ο $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot(\phi(z)+a)} d\rho(z) = \int e^{it\cdot y} d\mu(y) = \hat{\mu}(t) \quad , t \in \mathbb{R}^n$$

Εξάλλου όπως στη σχέση (5) στην απόδειξη του Λήμματος 5.2.3. $t\cdot\phi(z) = z\phi^T(t)$ και συνεπώς το πρώτο ολοκλήρωμα γράφεται

$$e^{it\cdot a} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot\phi(z)} d\rho(z) = e^{it\cdot a} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\phi^T(t)} d\rho(z)$$

και συνεπώς $\hat{\mu}(t) = e^{it\cdot a}\hat{\rho}(\phi^T(t)) \quad , t \in \mathbb{R}^n$.
Όμως $\hat{\rho}(\phi^T(t)) = e^{-\frac{1}{2}|\phi^T(t)|} = e^{-\frac{1}{2}(\Sigma t, t)}$ και τελικά

$$\hat{\mu}(t) = e^{it\cdot a - \frac{1}{2}(\Sigma t, t)} \quad , t \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Ο τύπος αυτός για την χ.σ. ενός μέτρου Gauss ισχύει πάντοτε, ακόμα και όταν ο Σ είναι εκφυλισμένος.
Ιδιαίτερα για $n = 1$ είναι $\Sigma = (\sigma)$ με $\sigma \geq 0$ και για τυχόν $a \in \mathbb{R}$ το μέτρο Gauss με παραμέτρους a, σ είναι

$$\mu(B) = \begin{cases} \delta_a(B) & \text{αν } \sigma = 0 \\ \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-a)^2} dx & \text{αν } \sigma > 0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή $(n = 1)$ όπως είναι γνωστό

$$\int_{\mathbb{R}} y d\mu(y) = a \quad , \quad \int_{\mathbb{R}} y^2 d\mu(y) - a^2 = \sigma.$$

Παρατήρηση 7.1.2. Έχοντας υπόψη την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ μέτρων πιθανότητας και χ.σ. θα μπορούσαμε εναλλακτικα να ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας Gauss με παραμέτρους a, Σ ως εκείνο το μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ του οποίου η χ.σ. $\hat{\mu}$ γράφεται όπως η (1) παραπάνω.

7.2 Μέτρα πιθανότητας Gauss σε διανυσματικούς χώρους απείρων διαστάσεων

Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ και X' ο δυϊκός του. Αν μ είναι μέτρο πιθανότητας ορισμένο σε σ-άλγεβρα που περιέχει την $\hat{C}(X, X')$ ή κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας ορισμένο στην κυλινδρική άλγεβρα $C(X, X')$ τότε για τυχόν $\beta \in X'$ θα γράφουμε μ_β το μέτρο πιθανότητας το οριζόμενο στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ από την

$$\mu_\beta(A) = \mu(\beta^{-1}(A)) \quad , A \in \mathscr{B}^1 \tag{1}$$

Ορισμός 7.2.1. *Ένα μέτρο πιθανότητας μ (αντ. κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ) ονομάζεται* ***μέτρο Gauss*** *(αντ.* ***κυλινδρικό μέτρο Gauss****) στον τοπικά κυρτό τ.δ.χ. X όταν είναι ορισμένο σε σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset \hat{C}(X, X')$ (αντ. στην κυλινδρική σ-άλγεβρα $C(X, X')$) και ικανοποιεί την παρακάτω απαίτηση: για κάθε $\beta \in X'$ το μέτρο μ_β το οριζόμενο από την (1) είναι μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}$.*

Παρατήρηση 7.2.2.

1. Αν μ είναι ένα μέτρο Gauss τότε εξ ορισμού $\int y^2 d\mu_{x'}(y) < +\infty$ για κάθε $x' \in X'$ και άρα $\int\limits_X |<x, x'>|^2 d\mu(x) < +\infty$ για κάθε $x' \in X'$. Είναι όπως λέγεται **ασθενούς δεύτερης τάξης**.

2. Είναι φανερό ότι ένα μέτρο Gauss μ περιοριζόμενο στην άλγεβρα $C(X, X')$ ορίζει ένα κυλινδρικό μέτρο Gauss . Το αντίστροφο **δεν** ισχύει όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω. Εν τούτοις είτε πρόκειται για μέτρο είτε για κυλινδρικό μέτρο Gauss το χ.σ. ορίζεται από τον ίδιο τύπο:

$$\hat{\mu}(x') = \int\limits_X e^{i<x,x'>} d\mu(x) \quad , x' \in X' \tag{2}$$

Εν τούτοις οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι στη δεύτερη περίπτωση το ολοκλήρωμα της (2) νοείται στον χώρο μέτρου $(X, \sigma(x'), \mu)$.

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ X και X' ο δυϊκός του. Έστω ακόμα μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο σε σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset \hat{C}(X, X')$. Ισχύει το ακόλουθο:*
Το μέτρο μ είναι μέτρο Gauss στον X όταν και μόνο όταν υπάρχουν γραμμική $a(x'), x' \in X'$ και θετική τετραγωνική μορφή $Q(x'), x' \in X'$ εις τρόπον ώστε

$$\hat{\mu}(x') = e^{ia(x') - \frac{1}{2}Q(x')} \quad , x' \in X' \tag{3}$$

Επιπλέον $a(x') = \int\limits_X <x, x'> d\mu(x)$ και
$Q(x') = \int\limits_X |<x, x'>|^2 d\mu(x) - a^2(x') \quad x' \in X'$.

Απόδειξη. Με αλλαγή μεταβλητής εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\hat{\mu}(yx') = \hat{\mu}_{x'}(y) \quad \text{για τυχόντα} \quad y \in \mathbb{R},\ x' \in X' \tag{4}$$

Αν μ είναι Gauss τότε έκαστο $\mu_{x'}$ είναι εξορισμού Gauss στον $\mathbb{R}^1$ με παραμέτρους $m = \int\limits_{\mathbb{R}} y d\mu_{x'}(y)$ και $\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} y^2 d\mu_{x'}(y) - m^2$ και χ.σ.

$$\hat{\mu}_{x'}(y) = e^{imy - \frac{1}{2}\sigma y^2} \quad , y \in \mathbb{R}$$

Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε (πάλι με αλλαγή μεταβλητής) ότι $m = \int\limits_X x' d\mu,\ \sigma = \int\limits_X (x')^2 d\mu - m^2$ και να επικαλεστούμε την (4) για $y = 1$ οπότε λαμβάνουμε την (3)

με $a(x') = \int\limits_X x' d\mu$ και $Q(x') = \int\limits_X (x')^2 d\mu - a^2(x'),\ x' \in X'$.
Αντίστροφα αν για το μέτρο πιθανότητας μ ισχύει η (3) τότε για τυχόν x' ισχύει (πάλι η (4))

$$\mu_{x'}(y) = \hat{\mu}(yx') = e^{ia(x')y - \frac{1}{2}Q(x')y^2} \quad , y \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς το μέτρο $\mu_{x'}$ είναι Gauss στον $\mathbb{R}^1$ με παραμέτρους $a(x')$ και $Q(x')$. Μάλιστα $a(x') = \int\limits_{\mathbb{R}} y d\mu_{x'}(y)$ και $Q(x') = \int\limits_{\mathbb{R}} y^2 d\mu_{x'}(y) - a^2(x')$ οπότε (αλλαγή μεταβλητής) $a(x') = \int\limits_X x' d\mu$ και $Q(x') = \int\limits_X (x')^2 d\mu - a^2(x')$. □

Παρατήρηση 7.2.4. Θα μπορούσαμε λοιπόν να ορίσουμε ένα μέτρο Gauss ως ένα μέτρο πιθανότητας του οποίου η χ.σ. $\hat{\mu}$ γράγεται όπως η (3). Μάλιστα με τον τρόπο αυτό καθίσταται άμεση η αναφορά στις παραμέτρους a, Q.Ακόμα καθίσταται φανερή η συμβατότητα των ορισμών των μέτρων Gauss σε πεπερασμένης και άπειρης διάστασης δ.χ.

Αν ο χώρος X είναι Hilbert και αφού $X' = X$ θα είναι:

Πόρισμα 7.2.5. Έστω X χώρος Hilbert και μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο σε σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset C(X, X')$. Τότε το μέτρο μ είναι μέτρο Gauss όταν και μόνο όταν $\hat{\mu}(x) = e^{ia(x) - \frac{1}{2}Q(x)}$, όπου a γραμμική και Q θετική τετραγωνική μορφή στον X. Επιπλέον $a(x) = \int\limits_X (y, x) d\mu(y)$ και $Q(x) = \int\limits_X (y, x)^2 d\mu(y) - a^2(x), x \in X$.

Η επιχειρηματολογία της απόδειξης του παραπάνω Θεωρήματος και του Πορίσματος του παραμένει ισχυρή για κυλινδρικά μέτρα και συνεπώς:

Θεώρημα 7.2.6. *Το παραπάνω Θεώρημα και το Πόρισμα του παραμένουν ισχυρά όταν "το μέτρο μ" αντικατασταθεί από "το κυλινδρικό μέτρο μ", "ή σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$" αντικατασταθεί από την "άλγεβρα $C(X, X')$" και το "μέτρο Gauss" από το "κυλινδρικό μέτρο Gauss".*

Η κατασκευή κυλινδρικών μέτρων Gauss είναι εύκολη όπως εξασφαλίζεται από το παρακάτω:

Θεώρημα 7.2.7. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. X και X' ο δυϊκός του. Έστω γραμμική $a : X' \mapsto \mathbb{R}$ και θετική τετραγωνική μορφή $Q : X' \mapsto \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο Gauss μ με παραμέτρους a, Q.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathcal{X}(x') = e^{ia(x') - \frac{1}{2}Q(x')} \quad , x' \in X'$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{X}(0) = 1$.
Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{X}(x'), x' \in X'$ είναι θετικά ορισμένη. Επειδή το γινόμενο θετικά ορισμένων συναρτήσεων είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση (δες [16] σελ. 187) θα

δείξουμε χωριστά ότι οι $e^{ia(x')}, e^{-\frac{1}{2}Q(x')}$, $x' \in X'$ είναι θετικά ορισμένες. Πράγματι για $\{c_1, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$ και $\{x'_1, ..., x'_n\} \subset X'$ έχουμε

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} c_k \bar{c}_\ell e^{ia(x'_k - x'_\ell)} =$$

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} c_k e^{ia(x'_k)} \cdot \overline{c_\ell e^{ia(x'_\ell)}} =$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ia(x_k)} \right|^2 \geq 0$$

Έστω τώρα b διγραμμική, συμμετρική μορφή τέτοια ώστε $Q(x') = b(x', x'), x' \in X'$. (Αρκεί $b(x', y') = \frac{1}{4}[Q(x'+y') - Q(x'-y')]$). Τότε η b είναι θετική (δηλαδή $b(x', x') \geq 0 \ \forall \ x' \in X'$) και άρα θετικά ορισμένη αφού για $\{\xi_1, ..., \xi_n\} \subset \mathbb{R}$ και $\{x'_1, ..., x'_n\} \subset X'$ είναι $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j b(x'_i, x'_j) = b(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x'_i, \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x'_i) \geq 0$ (λόγω συμμετρίας αρκεί $\xi_i \in \mathbb{R}$). Επίσης εύκολα από την $Q(x') = b(x', x')$ συνάγουμε ότι $Q(x'_k - x'_\ell) = Q(x'_k) + Q(x'_\ell) - 2b(x'_k, x'_\ell)$ και συνεπώς η παράσταση $A = \sum\limits_{k,\ell=1}^{n} \xi_k \xi_\ell e^{-\frac{1}{2}Q(x'_k - x'_\ell)} = \sum\limits_{k,\ell=1}^{n} \xi_k e^{-\frac{1}{2}Q(x'_k)} . \xi_\ell e^{-\frac{1}{2}Q(x'_\ell)} . e^{b(x'_k, x'_\ell)}$ και θέτοντας $\xi_m e^{-\frac{1}{2}Q(x'_m)} = \xi'_m$ έχουμε $A = \sum\limits_{k,\ell=1}^{n} \xi'_k \xi'_\ell e^{b(x'_k, x'_\ell)}$. Όμως είναι γνωστό ότι αν φ είναι θετικά ορισμένη τότε e^{ϕ} είναι θετικά ορισμένη ([16] σελ. 187) και συνεπώς $A \geq 0$.
Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{X}$ είναι ψευδοσυνεχής (συνεχής σε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του X'). Πράγματι έστω πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος $E \subset X'$ και $\{e_1, ..., e_k\}$ βάση του. Επειδή η τοπολογία του E είναι οριζόμενη από τη norm $|x'| = (y_1^2 + ... + y_k^2)^{\frac{1}{2}}$ όταν $x' = y_1 e_1 + ... + y_k e_k$ συμπεραίνουμε ότι για ακολουθία $x'_n = y_1^n e_1 + ... + y_k^n e_k$, $n \in \mathbb{N}$ και $x' = y_1 e_1 + ... + y_k e_k$ ισχύει $x'_n \to x'$ στον E όταν και μόνο όταν $y_m^n \to y_m$ για κάθε $m = 1, ..., k$. Συνεπώς $a(x'_n) = \sum\limits_{m=1}^{k} y_m^n a(e_m) \to \sum\limits_{m=1}^{k} y_m a(e_m) = a(x')$ όταν $x'_n \to x'$ στον E. Εξάλλου αν b είναι συμμετρική διγραμμική μορφή στον X' εις τρόπον ώστε $Q(x') = b(x', x')$ τότε $Q(x'_n) = Q(\sum\limits_{m=1}^{k} y_m^n e_m) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} y_i^n y_j^n b(e_i, e_j)$ και συνεπώς $Q(x'_n) \to \sum\limits_{i,j=1}^{k} y_i y_j b(e_i, e_j) = Q(\sum\limits_{m=1}^{k} y_m e_m)$ και άρα $Q(x'_n) \to Q(x')$. Ώστε $\mathcal{X}(x'_n) \to \mathcal{X}(x')$ όταν $x'_n \to x'$ στον E.
Άρα η $\mathcal{X}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.4. και άρα υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο μ στον X εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Επικαλούμενοι τώρα το Θεώρημα 7.2.6. συμπεραίνουμε ότι το μ είναι κυλινδρικό μέτρο Gauss με παραμέτρους a, Q.

□

Παράδειγμα 7.2.8. Έστω ότι X είναι χώρος Hilbert απείρων διαστάσεων και

$\mathcal{X}(x) = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}, x \in X$. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο Gauss μ στον X εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε μήπως το κυλινδρικό μέτρο μ επεκτείνεται σε "πραγματικό" μέτρο μ σε μια σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset C(X, X')$. Η απάντηση είναι **αρνητική** διότι αν αυτό ήταν δυνατόν τότε σύμφωνα με το Πόρισμα 5.1.5. η χ.σ. $\hat{\mu} = \mathcal{X}$ θα ήταν ακολουθιακά συνεχής για την ασθενή τοπολογία του X δηλαδή $\mathcal{X}(x_n) \to \mathcal{X}(x)$ όταν $x_n, x \in X$ και $(x_n, y) \to (x, y)$ για κάθε $y \in X$ και συνεπώς θα είχαμε $\|x_n\| \to \|x\|$ όταν $(x_n, y) \to (x, y)$ για κάθε $y \in X$. Όμως είναι δυνατόν να βρούμε ακολουθία $x_n \in X$ που συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ αλλά δεν ισχύει $\|x_n\| \to \|x\|$.

7.3 Το χ. σ. μέτρων Gauss σε χώρους Hilbert. Θεώρημα Mourier

Όπως είδαμε παραπάνω από τον ορισμό ενός μέτρου Gauss μ απορρέει άμεσα ότι είναι ασθενούς δεύτερης τάξης, δηλαδή:

$$\int_X |< x, x' >|^2 d\mu(x) < +\infty \quad \text{για κάθε} \quad x' \in X'$$

Ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου ο χώρος X είναι **Hilbert** η συνθήκη αυτή καθίσταται

$$\int_X (u, y)^2 d\mu(u) < +\infty \quad \text{για κάθε} \quad y \in X$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι $\int\limits_X |(u, y)| d\mu(u) < +\infty$
και $\int\limits_X |(u, x)(u, y)| d\mu(u) < +\infty$ για όλα τα $x, y \in X$ και συνεπώς ορίζεται η διγραμμική μορφή

$$r(x, y) = \int_X (u, x)(u, y) d\mu(u) - \int_X (u, x) d\mu(u) \cdot \int_X (u, y) d\mu(u)$$

Η δ ιγραμμική μορφή r είναι φανερά συμμετρική, θετική και ορίζει (κατά το συνήθη τρόπο με το Θεώρημα Riesz) έναν τελεστή $R : X \mapsto X$ εις τρόπον ώστε

$$(Rx, y) = r(x, y) \quad \text{για όλα τα} \quad x, y \in X \tag{1}$$

Ο τελεστής R ονομάζεται **τελεστής διακύμανσης** του μέτρου μ και φανερά είναι συμμετρικός, θετικός ($(Rx, x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$) και άρα συνεχής στον X. Ακόμα λαμβάνοντας υπόψη την (1) έχουμε ότι

$$(Rx, x) = \int_X (u, x)^2 d\mu(u) - \left(\int_X (u, x) d\mu(u) \right)^2 \quad , x \in X$$

και συνεπώς το χ.σ. του μέτρου Gauss μ γράφεται (δες Πόρισμα 7.2.5.)

$$\hat{\mu}(x) = e^{ia(x) - \frac{1}{2}(Rx, x)} \quad , x \in X \tag{2}$$

όπου $a(x) = \int\limits_X (u,x)d\mu(u), x \in X$.
Επίσης είναι γνωστό (ο χώρος είναι Hilbert) ότι υπάρχει $m \in X$ εις τρόπον ώστε

$$a(x) = (m,x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in X$$

(πρόκειται για το ολοκλήρωμα Pettis $m = \int\limits_X xd\mu(x)$)
και έτσι το χ.σ. ενός μέτρου Gauss μ γράφεται

$$\hat{\mu}(x) = \exp^{i(m,x)-\frac{1}{2}(Rx,x)} \quad ,x \in X$$

Το στοιχείο $m \in X$ είναι η **μέση τιμή** του μέτρου μ.

Το επόμενο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει πλήρως τα συναρτησοειδή που μπορούν να είναι χ.σ. ενός μέτρου Gauss σε ένα χώρο Hilbert.

Θεώρημα 7.3.1. *(E. Mourier)*
Έστω X χώρος Hilbert και μ μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}(X))$. Τότε το μέτρο μ είναι κανονικό μέτρο Gauss όταν και μόνο όταν το χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι της μορφής

$$\mathcal{X}(x) = e^{i(m,x)-\frac{1}{2}(Rx,x)} \quad ,x \in X \tag{3}$$

όπου $m \in X$ και R συμμετρικός, θετικός πυρηνικός (nuclear) τελεστής στον X.

Απόδειξη. Έστω ότι το μ είναι κανονικό μέτρο Gauss.Σύμφωνα με την προηγηθείσα συζήτηση το χ.σ. είναι της μορφής (3) όπου $m \in X$ και R ο τελεστής διακύμανσης του μ. Αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής R είναι πυρηνικός.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Sazonov το χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι συνεχές στο $x = 0$ για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X)$. Συνεπώς για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει τελεστής $S \in \mathbf{S}(X)$ τέτοιος ώστε :$|1 - \hat{\mu}(x)| < 1 - e^{-\frac{1}{2}\epsilon}$ όταν $x \in X$ με $(Sx,x) < 1$. Όμως $1 - Re\hat{\mu}(x) \leq |1 - \hat{\mu}(x)|$ και $Re\hat{\mu}(x) \leq e^{-\frac{1}{2}(Rx,x)}$ και συνεπώς $1 - e^{-\frac{1}{2}(Rx,x)} < 1 - e^{-\frac{1}{2}\epsilon}$ όταν $(Sx,x) < 1$ και τελικά

$$(Rx,x) < \epsilon \quad \text{όταν} \quad x \in X \quad \text{με} \quad (Sx,x) < 1 \tag{4}$$

Τώρα για τυχόν $x_0 \in X$ και τυχόν $d > \sqrt{(Sx_0,x_0)}$ θα είναι $(S\frac{x_0}{d}, \frac{x_0}{d}) = \frac{1}{d^2}(Sx_0,x_0) < 1$ και άρα από την (4) συμπεραίνουμε ότι $(R\frac{x_0}{d}, \frac{x_0}{d}) < \epsilon$ και συνεπώς

$$(Rx_0,x_0) < \epsilon d^2 \quad \text{για τυχόν} \quad d > \sqrt{(Sx_0,x_0)}$$

Ώστε για τυχόν $x_0 \in X$

$$(Rx_0,x_0) \leq \epsilon(Sx_0,x_0) \tag{5}$$

και άρα για οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση $\{e_j, j \in I\}$ και οποιοδήποτε υποσύστημα $\{e_{j_n}, n \in \mathbb{N}\}$ θα είναι

$$\sum_n (Re_{j_n}, e_{j_n}) \leq \epsilon \sum_n (Se_{j_n}, e_{j_n}) < +\infty$$

αφού ο τελεστής S είναι πυρηνικός.
Όπως στο Λήμμα 6.3.6. συμπεραίνουμε ότι $(Re_j, e_j) > 0$ μέχρι και για αριθμήσιμο πλήθος δεικτών $j \in I$. Συνεπώς και πάλι από την (5) έχουμε ότι $\sum_j (Re_j, e_j) < +\infty$ (αφού S πυρηνικός) και συνεπώς ο R είναι πυρηνικός (δες [16] σελ. 161).
Αντίστροφα : Έστω συνάρτηση $\mathcal{X}$ της μορφής (3). Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.2.3. αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κανονικό μέτρο μ για το οποίο $\hat{\mu} = \mathcal{X}$.
Θέτουμε $h(x) = e^{-\frac{1}{2}(Rx,x)}$. Προφανώς $h(0) = 1$ και όπως δείξαμε κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.7. η h είναι θετικά ορισμένη. Θα δείξουμε τώρα ότι είναι συνεχής για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X)$ στο $x = 0$. Πράγματι για τυχόν $\epsilon > 0$ θεωρούμε την περιοχή $V = \{x : (Rx, x) < -2\ln(1-\epsilon)\}$ και εύκολα επαληθεύεται ότι $|1 - h(x)| < \epsilon$ για όλα τα $x \in V$. Ώστε η h ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Sazonov και άρα υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο v εις τρόπον ώστε $\hat{v} = h$.
Ορίζουμε τώρα το μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B}(X))$ με την $\mu(B) = v(\phi^{-1}(B))$ όπου $\phi(x) = x + m$ ή αλλιώς $\mu(B) = v(B - m)$. Το μέτρο μ είναι κανονικό και ισχύει:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(x) &= \int_X e^{i(x,y)} d\mu(y) \\
&= \int_X e^{i(x,y+m)} dv(y) \\
&= e^{i(x,m)} \hat{v}(x) \\
&= \mathcal{X}(x) \quad \forall\, x \in X
\end{aligned}$$

□

Παράρτημα Α΄

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2.

Λήμμα Α΄.0.2. *Έστω τοπολογικός χώρος Hausdorff* $(X, \mathcal{T})$ *και ανοικτά* $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. *Έστω συμπαγές* $K \in \mathcal{K}$ *με* $K \subset U_1 \cup U_2$. *Τότε υπάρχουν συμπαγή* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *με* $K = K_1 \cup K_2$ *και* $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$.

Απόδειξη. Τα σύνολα $K \cap U_1^c$, $K \cap U_2^c$ είναι ξένα και συμπαγή και άρα (X Hausdorff) υπάρχουν ανοικτά V_1, V_2 με $V_1 \supset K \cap U_1^c$,$V_2 \supset K \cap U_2^c$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Θέτουμε $K_1 = K \cap V_1^c$ και $K_2 = K \cap V_2^c$. Τα K_1, K_2 είναι συμπαγή και είναι τα ζητούμενα.

□

Λήμμα Α΄.0.3. *Έστω* $\mathcal{H}$ *κλάση υποσυνόλων του συνόλου* S *με* $\emptyset \in \mathcal{H}$. *Έστω* $\lambda : \mathcal{H} \mapsto [0, \infty]$ *με* $\lambda(\emptyset) = 0$ *και έστω* μ *το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος* $(\mathcal{H}, \lambda)$. *Έστω* $\mathcal{M}_\mu = \{X \subset S : \mu(A \cap X) + \mu(A \cap X^c) = \mu(A)$ *για κάθε* $A \subset S\}$ *η σ-άλγεβρα των μετρήσιμων υποσυνόλων του* S. *Τότε* $X \in \mathcal{M}_\mu \Leftrightarrow \lambda(A) \geq \mu(A \cap X) + \mu(A \cap X^C)$ *για κάθε* $A \in \mathcal{H}$ *με* $\lambda(A) < \infty$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Προφανής αν παρατηρήσουμε ότι $\mu(A) \leq \lambda(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{H}$. ($\Leftarrow$) Έστω τυχόν $T \subset S$. Η ανισότητα $\mu(T) \leq \mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c)$ ισχύει λόγω υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου μ. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την $\mu(T) \geq \mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^C)$ και μάλιστα για την περίπτωση $\mu(T) < +\infty$. Πράγματι για τυχόν $\epsilon > 0$ από τον ορισμό του μ εξασφαλίζεται η ύπαρξη μιας οικογένειας $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ με $\bigcup_n A_n \supset T$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \mu(T) + \epsilon \tag{1}$$

Επειδή $T \cap X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \bigcap X$ και $T \cap X^c \subset \bigcup_n A_n \cap X^c$ θα είναι: $\mu(T \cap X) \leq$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap X)$ και $\mu(T \cap X^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap X^c)$ άρα

$$\mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n \cap X) + \mu(A_n \cap X^c)] \qquad (2)$$

Από την (1) εξασφαλίζεται ότι $\lambda(A_n) < \infty$ και από την υπόθεση ότι $\mu(A_n \cap X) + \mu(A_n \cap X^c) \leq \lambda(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Έτσι από την (2) και ξανά την (1) έχουμε για κάθε $\epsilon > 0$

$$\mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \mu(T) + \epsilon$$

Ώστε $\mu(T) \geq \mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c)$ για κάθε $T \subset S$.

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2:

Ορίζουμε $\tau_* : \mathcal{T} \mapsto [0, \infty]$ ως ακολούθως

$$\tau_*(U) = \sup\{\tau(K) : K \in \mathcal{K} \text{ με } K \subset U\} \qquad , U \in \mathcal{T}$$

Έστω μ το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathcal{T}, \tau_*)$. Είναι φανερό ότι

$$\mu(U) \leq \tau_*(U) \quad \forall U \in \mathcal{T}$$

1. $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{T}$
   Σύμφωνα με το Λήμμα 0.3. αρκεί να δείξουμε ότι $\tau_*(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c)$ για όλα τα $A, B \in \mathcal{T}$ με $\tau_*(A) < +\infty$. Πράγματι:
   Για τυχόν $D \in \mathcal{K}$ με $D \subset A \cap B$ ισχύουν τα παρακάτω:
   για όλα τα $E \in \mathcal{K}$ με $E \subset A \cap D^C$ έχουμε

   $$D \cup E \in \mathcal{K} \quad , D \cup E \subset A \quad \text{και} \quad D \cap E = \emptyset$$

   και άρα $\tau_*(A) \geq \tau(D \cup E) = \tau(D) + \tau(E)$
   (η τ είναι απλά προσθετική στο $\mathcal{K}$).
   Από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

   $$\sup\{\tau(E) : E \in \mathcal{K} \text{ με } E \subset A \cap D^c\} \leq \tau_*(A) - \tau(D)$$

   και λαμβάνοντας υπόψην ότι $A \cap D^C \in \mathcal{T}$ συμπεραίνουμε ότι

   $$\tau_*(A) \geq \tau_*(A \cap D^c) + \tau(D) \text{ για κάθε } D \in \mathcal{K} \text{ με } D \subset A \cap B \qquad (\star)$$

   Τώρα για όλα τα $D \in \mathcal{K}$ με $D \subset A \cap B$ έχουμε τα εξής: $A \cap D^c \supset A \cap B^c$ και $A \cap D^c \in \mathcal{T}$ και συνεπώς $\mu(A \cap B^c) \leq \tau_*(A \cap D^c)$ οπότε λόγω της $(\star)$ συμπεραίνουμε ότι

   $$\tau_*(A) \geq \mu(A \cap B^c) + \tau(D) \text{ για όλα τα } D \in \mathcal{K} : D \subset A \cap B$$

   Από αυτή και το $\sup\{\tau(D) : D \in \mathcal{K} \text{ με } D \subset A \cap B\} = \tau_*(A \cap B)$ έχουμε $\tau_*(A) \geq \mu(A \cap B^c) + \tau_*(A \cap B)$.
   Όμως $\tau_*(A \cap B) \geq \mu(A \cap B)$ και συνεπώς το ζητούμενο.

2. Η τ_* είναι μονότονη και σ-υποπροσθετική στο $\mathcal{T}$.
Η μονοτονία προκύπτει άμεσα. Θα δείξουμε τώρα ότι η τ_* είναι απλά υποπροσθετική και στη συνέχεια ότι είναι σ-υποπροσθετική στο $\mathcal{T}$. Πράγματι: Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Για τυχόν $K \subset U_1 \cup U_2$ και σύμφωνα με το Λήμμα 0.2. υπάρχουν συμπαγή K_1, K_2 με $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$ και $K = K_1 \cup K_2$. Άρα:

$$\tau(K) = \tau(K_1 \cup K_2) \leq \tau(K_1) + \tau(K_2) \leq \tau_*(U_1) + \tau_*(U_2)$$

και συνεπώς $\sup\{\tau(K) : K \in \mathcal{K}$ με $K \subset U_1 \cup U_2\} \leq \tau_*(U_1) + \tau_*(u_2)$. Όμως το πρώτο μέλος ισούται με $\tau_*(U_1 \cup U_2)$.
Θεωρούμε τώρα $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$. Για τυχόν $K \in \mathcal{K}$ με $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλαδή $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{n_k}$ οπότε $\tau(K) \leq \tau_*(\bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{n_k})$. Λόγω (απλής) υποπροσθετικότητας της τ_* ισχύει $\tau_*(\bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{n_k}) \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \tau_*(U_{n_k})$ και συνεπώς $\tau(K) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n)$ για όλα τα συμπαγή $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Άρα το ζητούμενο.

3. $\mu(U) = \tau_*(U)$ για κάθε $U \in \mathcal{T}$.
Η $\mu(U) \leq \tau_*(U), U \in \mathcal{T}$ είναι φανερή. Η αντίθετη ανισότητα αρκεί να δειχτεί στην περίπτωση $\mu(U) < +\infty$.
Τότε :
$$\mu(U) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(V_n) : V_n \in \mathcal{T} \text{ και } \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \supset U\right\}.$$
Όμως η τ_* είναι σ-υποπροσθετική και μονότονη, άρα για οποιαδήποτε οικογένεια $\{V_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ με $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n \supset U$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(V_n) \geq \tau_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) \geq \tau_*(U).$$

Άρα $\qquad \mu(U) \geq \tau_*(U) \quad \forall U \in \mathcal{T}$.

4. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{T}$ με $U \supset A\} \quad \forall A \subset X$.

   - Για $\mu(A) = +\infty$ είναι άμεση.
   - Για $\mu(A) < +\infty$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ με $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n \supset A$ με
   $$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n) < \mu(A) + \epsilon$$

Αν θέσουμε $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ τότε $V \supset A, V \in \mathcal{T}$ και

$$\mu(A) \leq \mu(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n)$$

συνεπώς $\qquad \mu(A) \leq \mu(V) < \mu(A) + \epsilon$

5. $\mu(K) = \tau(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}$
   Έστω τυχόν $K \in \mathcal{K}$. Σύμφωνα με το 3,4

$$\mu(K) = \inf\{\tau_*(U) : U \in \mathcal{T} \text{ με } U \supset K\}$$

   Όμως από τον ορισμό της τ_* ισχύει $\tau_*(U) \geq \tau(K)$ όταν $U \in \mathcal{T}, K \in \mathcal{K}$ και $U \supset K$. Άρα $\mu(K) \geq \tau(K)$.
   Εξάλλου για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει από υπόθεση $U_\epsilon \in \mathcal{T}$ με $U_\epsilon \supset K$ και $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ όταν $C \in \mathcal{K}$ και $K \subset C \subset U_\epsilon$. Από την τελευταία ανισότητα και λόγω της μονοτονίας της τ έχουμε:

$$\tau_*(U) = \sup\{\tau(C) : C \in \mathcal{K} \text{ με } K \subset C \subset U_\epsilon\} \leq \tau(K) + \epsilon$$

   και από το 3 $\quad \mu(U_\epsilon) \leq \tau(K) + \epsilon$.
   Όμως $U_\epsilon \supset K$ και άρα $\mu(K) \leq \tau(K) + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$

Παράρτημα Β′

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.4.

Στην απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί η **ανοδικά διευθυνόμενη** οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου. Πρόκειται για οικογένεια υποσυνόλων $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ με την ιδιότητα:

> Για οποιαδήποτε A_a, A_b από αυτήν υπάρχει A_γ από αυτήν με $A_a \cup A_b \subset A_\gamma$.

Επίσης θα χρησιμοποιηθεί μια ιδιότητα της συνολοσυνάρτησης τ που προκύπτει από τις i, ii, iv.

Λήμμα Β′.0.4. *Έστω ανοδική* ***ανοικτών*** $\{U_\lambda\} \subset \mathscr{A}$ *με* $\bigcup\limits_{\lambda} U_\lambda = X$. *Τότε* $\sup\limits_{\lambda} \tau(U_\lambda) = 1$.

Απόδειξη. Πράγματι· για τυχόν $\epsilon > 0$ θεωρούμε συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ όπως στην υπόθεση iv. Τότε υπάρχει πεπερασμένο $I \subset \Lambda$ με $K_\epsilon \subset \bigcup\limits_{\lambda \in I} U_\lambda \in \mathscr{A}$ και από τη μονοτονία της τ (που προκύπτει από την ii) έχουμε

$$1 \geq \tau\Big(\bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda\Big) > 1 - \epsilon$$

Όμως υπάρχει $\gamma \in \Lambda$ με $\bigcup\limits_{\lambda \in I} U_\lambda \subset U_\gamma \in \mathscr{A}$ και για το οποίο θα είναι

$$1 \geq \tau(U_\gamma) > 1 - \epsilon$$

όθεν το ζητούμενο. □

Τώρα για τα ανοικτά $U \in \mathcal{T}_X$ ορίζουμε

$$\tau_*(U) = \sup\{\tau(B) : B \subset U, B \in \mathscr{A}\}$$

και έστω μ το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau_*, \mathcal{T}_X)$.

1. Έστω ανοδική $\{U_\lambda\} \subset \mathscr{A}$ και $U = \bigcup\limits_\lambda U_\lambda$. Τότε

$$\tau_*(U) = \sup_\lambda \tau(U_\lambda)$$

Πράγματι· επειδή $\tau(U_\lambda) \leq \tau_*(U) \quad \forall \lambda$ είναι αρκετό να δείξουμε ότι η $\sup\limits_\lambda \tau(U_\lambda) < \tau_*(U)$ οδηγεί σε άτοπο.
Έστω $\epsilon > 0$ εις τρόπον ώστε

$$\tau_*(U) - \sup_\lambda \tau(U_\lambda) > 2\epsilon \tag{1}$$

Από τον ορισμό της τ_* υπάρχει $B_\epsilon \in \mathscr{A}$ με $B_\epsilon \subset U$ και

$$\tau(B_\epsilon) > \tau_*(U) - \frac{\epsilon}{2}$$

Από την υπόθεση *iii* προκύπτει κλειστό $F_\epsilon \in \mathscr{A}$ με $F_\epsilon \subset B_\epsilon$ και

$$\tau(F_\epsilon) > \tau(B_\epsilon) - \frac{\epsilon}{2}$$

και συνεπώς

$$\tau(F_\epsilon) > \tau_*(U) - \epsilon \tag{2}$$

Επειδή η οικογένεια $\{U_\lambda \cup F_\epsilon^c\} \subset \mathscr{A}$ είναι ανοδική και $\bigcup\limits_\lambda (U_\lambda \cup F_\epsilon^c) = X$ θα έχουμε (από το Λήμμα) ότι

$$\sup_\lambda \tau(U_\lambda \cup F_\epsilon^c) = 1 \tag{3}$$

όμως λόγω των (2), (1)

$$\begin{aligned}\sup_\lambda \tau(U_\lambda \cup F_\epsilon^c) &\leq \sup_\lambda [\tau(U_\lambda) + 1 - \tau(F_\epsilon)] \\ &\leq \sup_\lambda \tau(U_\lambda) + 1 - \tau_*(U) + \epsilon \\ &< -2\epsilon + 1 + \epsilon \\ &= 1 - \epsilon < 1 \quad \text{Άτοπο}\end{aligned}$$

2. Αν $\{U_\lambda\} \subset \mathcal{T}_X$ είναι ανοδική με $\bigcup\limits_\lambda U_\lambda = U$ τότε

$$\tau_*(U) = \sup_\lambda \tau_*(U_\lambda)$$

Έστω $\mathscr{H} = \{A \subset X : A \in \mathscr{A}, A \text{ ανοικτό} \subset U_\lambda \text{ για κάποιο } \lambda\}$.
Φανερά η $\mathscr{H}$ είναι ανοδική και ακόμα $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{H}} A = U$. Το τελευταίο διότι για τυχόν $x \in U$ συμπεραίνουμε ότι $x \in U_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda$ και αφού η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση θα είναι $U_\lambda = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ με ανοικτά $A_i \in \mathscr{A}$, οπότε $x \in A_i \equiv$

$A \subset U_\lambda$. Όμως $A \in \mathscr{H}$.
Ο αντίθετος εγκλεισμός είναι προφανής. Ώστε κατά το 1

$$\tau_*(U) = \sup\{\tau(A) : A \in \mathscr{H}\} \tag{4}$$

Επειδή τώρα για τυχόν $A \in \mathscr{H}$ είναι $A \subset U_\lambda$ για κάποιο λ και συνεπώς $\tau(A) \leq \tau_*(U_\lambda)$ για κάποιο λ, το δεύτερο μέλος της (4)είναι $\leq \sup\limits_\lambda \tau_*(U_\lambda)$.
Ώστε

$$\tau_*(U) \leq \sup_\lambda \tau_*(U_\lambda)$$

Η αντίθετη ανισότητα προκύπτει από την $\tau_*(U_\lambda) \leq \tau_*(U) \quad \forall \lambda$.

3. Η τ_* είναι (απλά) προσθετική, υποπροσθετική και σ-υποπροσθετική. Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ με $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Αφού η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση της τοπολογίας θα είναι

$$U_1 = \bigcup_{a \in I} V_a^1 \text{ με } V_a^1 \in \mathscr{A} \text{ , ανοικτά}$$

Συνεπώς

$$U_1 = \bigcup (\bigcup_{a \in i} V_a^1 : i \text{ πεπερασμένο } \subset I) = \bigcup_i U_i^1$$

με την $\{U_i^1\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ προφανώς ανοδική.
Όμοια $U_2 = \bigcup\limits_j U_j^2$ με την $\{U_j^2\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ επίσης ανοδική και αναγκαστικά

$$U_i^1 \cap U_j^2 = \emptyset \quad \forall\, i, j$$

Η οικογένεια $\{\Psi_{(i,j)} = U_i^1 \cup U_j^2\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ είναι ανοδική και προφανώς $\bigcup\limits_{(i,j)} \Psi_{(i,j)} = U_1 \cup U_2$ οπότε κατά το 1

$$\begin{aligned}
\tau_*(U_1 \cup U_2) &= \sup_{(i,j)} \tau(U_i^1 \cup U_j^2) \\
&= \sup_{(i,j)} [\tau(U_i^1) + \tau(U_j^2)] \\
&= \sup_i \tau(U_i^1) + \sup_j \tau(U_j^2) \\
&= \tau_*(U_1) + \tau_*(U_2)
\end{aligned}$$

Για την σ-υποπροσθετικότητα, ας είναι $U_n \in \mathcal{T}_X,\ n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\tau_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \tau_*(\bigcup \{\bigcup_{n \in i} U_n : i \text{ πεπερ. } \subset \mathbb{N}\})$$

και συνεπώς κατά το 2 και την υποπροσθετικότητα της τ_* (που συνάγεται όπως η απλή προσθετικότητα) είναι

$$\begin{aligned}\tau_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) &= \sup\{\tau_*(\bigcup_{n\in i} U_n) : i \text{ πεπερ. } \subset \mathbb{N}\}\\ &\leq \sup_i \sum_{n\in i} \tau_*(U_n)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n)\end{aligned}$$

4.

$$\mu(U) = \tau_*(U) \quad \forall\, U \in \mathcal{T}_X$$

Η $\mu(U) \leq \tau_*(U)$ $\forall$ U ανοικτό $\subset X$, προφανής. Εξάλλου για τυχούσα $\{V_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}_X$ με $\bigcup_n V_n \supset U \in \mathcal{T}_X$ και επικαλούμενοι το 3 έχουμε

$$\sum_n \tau_*(V_n) \geq \tau_*(\bigcup_n V_n) \geq \tau_*(U)$$

Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου συμπεραίνουμε ότι $\mu(U) \geq \tau_*(U)$.

5. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon : \mu(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$.
Από την υπόθεση iv υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ με

$$\tau(B) > 1 - \epsilon \quad \forall\, B \in \mathscr{A} \text{ με } B \supset K_\epsilon \tag{5}$$

Αφού K_ϵ^c ανοικτό και η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση της τοπολογίας θα έχουμε ότι $K_\epsilon^c = \bigcup_i U_i$ με $\{U_i\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ ανοδική. Λαμβάνοντας υπόψη τα 1,4 έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\mu(K_\epsilon^c) &= \tau_*(K_\epsilon^c)\\ &= \sup_i \tau(U_i)\\ &= \sup_i (1 - \tau(U_i^c))\\ &= 1 - \inf_i \tau(U_i^c)\end{aligned}$$

Από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου είναι

$$\mu(K_\epsilon^c) \geq 1 - \mu(K_\epsilon)$$

και συνεπώς

$$\mu(K_\epsilon) \geq \inf_i \tau(U_i^c)$$

Όμως $U_i^c \in \mathscr{A}$ και $U_i^c \supset K_\epsilon$. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε την (5).

6.
$$\mathcal{M}_\mu \supset \mathscr{B}(X)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχόν $U \in \mathcal{T}$ ισχύει

$$\tau_*(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \text{ για όλα τα } A \in \mathcal{T}$$

Θα το δείξουμε πρώτα στην περίπτωση που το $U \in \mathcal{T}$ και έχει συμπαγές συμπλήρωμα $U^c = L$. Τότε όπως είναι γνωστό για κάθε $x \in U$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές N_x του x και N_L του L ώστε $N_x \cap N_L = \emptyset$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε $N_x \subset U$ και $N_x \in \mathscr{A}$ αφού η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση της τοπολογίας. Φανερά τώρα έχουμε $\bar{N}_x \subset \overline{N_L^c} = N_L^c \subset U$ και συνεπώς $U = \bigcup\limits_{x\in U} N_x$ με $N_x \in \mathscr{A}$ και $\bar{N}_x \subset U$.
Τελικά $U = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ με $V_\lambda \in \mathscr{A}$ και $\bar{V}_\lambda \subset U$ οπότε

$$U = \bigcup (\bigcup_{\lambda\in i} V_\lambda : i \text{ πεπερ. } \subset \Lambda) = \bigcup_i U_i$$

όπου $\{U_i\} \subset \mathscr{A}$ ανοδική με $\bar{U}_i = F_i \subset U$.
Τώρα το $A = (A \cap U_i) \cup (A \cap U_i^c) \supset (A \cap U_i) \cup (A \cap F_i^c)$.
Άρα από το 3 και 4 έχουμε

$$\begin{aligned}
\tau_*(A) &\geq \tau_*[(A \cap U_i) \cup (A \cap F_i^c)] \\
&= \tau_*(A \cap U_i) + \tau_*(A \cap F_i^c) \\
&\geq \tau_*(A \cap U_i) + \mu(A \cap F_i^c) \quad \forall i
\end{aligned}$$

και αφού $F_i^c \supset U^c$

$$\tau_*(A) \geq \tau_*(A \cap U_i) + \mu(A \cap U^c) \quad \forall i$$

Όμως από 2 και 4

$$\sup_i \tau_*(A \cap U_i) = \tau_*(A \cap U) = \mu(A \cap U)$$

και συνεπώς

$$\tau_*(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \text{ για όλα τα } A \in \mathcal{T}_X$$

Ώστε τα $U \in \mathcal{T}_X$ με U^c συμπαγές ανήκουν στην $\mathcal{M}_\mu$ και συνεπώς $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{K}_X$.
Τώρα από την 5 μπορούμε να βρούμε ακολουθία συμπαγών $K_n \subset X, n \in \mathbb{N}$ με $\mu(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$ και συνεπώς με $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ θα είναι $Y \in \mathcal{M}_\mu$ και $\mu(Y) = 1$. Έτσι για τυχόν $U \in \mathcal{T}$ το $F = U^c$ είναι κλειστό και $F = (F \cap Y) \cup (F \cap Y^c)$. Οπότε αφενός μεν $\mu(F \cap Y^c) \leq \mu(Y^c) = 0$ άρα $F \cap Y^c \in \mathcal{M}_\mu$ αφετέρου δε $F \cap Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (F \cap K_n)$ και $F \cap K_n \in \mathcal{K}_X$.

7.
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{T} \text{ με } U \subset A\} \ , A \subset X$$
Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}_X$ με $\bigcup_n U_n \supset A$ εις τρόπον ώστε
$$\mu(A) \leq \sum_n \tau_*(U_n) < \mu(A) + \epsilon$$
Αν θέσουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ τότε $U \in \mathcal{T}_X$, $U \supset A$
και άρα
$$\mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \epsilon$$

8. $\mu = \tau$ στην $\mathscr{A}$
Έστω $B \in \mathscr{A}$. Τότε για τυχόν $U \in \mathcal{T}_X$ με $U \supset B$
$$\mu(U) = \tau_*(U) = \sup\{\tau(\Gamma) : \Gamma \subset U, \Gamma \in \mathscr{A}\} \geq \tau(B)$$
και συνεπώς
$$\inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{T}_X \text{ με } U \supset B\} \geq \tau(B)$$
Επικαλούμενοι την 7 παίρνουμε την $\mu(B) \geq \tau(B)$. Εξάλλου από τις ii, iii
$$\tau(B) = \inf\{\tau(U) : U \in \mathscr{A}, U \text{ ανοικτό με } U \supset B\}$$
Άρα για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $U_\epsilon \in \mathscr{A} \cap \mathcal{T}_X$ με
$$U_\epsilon \supset B \quad \text{ και } \tau(U_\epsilon) < \tau(B) + \epsilon$$
και από τη μονοτονία της τ στην $\mathscr{A}$ θα έχουμε
$$\tau(\Gamma) < \tau(B) + \epsilon \ \ \forall \Gamma \in \mathscr{A} \text{ με } \Gamma \subset U_\epsilon$$
Από τον ορισμό της τ_*, το 4 και το $U_\epsilon \supset B$ συμπεραίνουμε τώρα ότι για κάθε $\epsilon > 0$
$$\mu(B) \leq \mu(U_\epsilon) = \tau_*(U_\epsilon) \leq \tau(B) + \epsilon$$
Ώστε
$$\mu(B) \leq \tau(B)$$
Το ότι το μέτρο μ στον $(X, \mathcal{M}_\mu)$ είναι κανονικό προκύπτει τώρα από τα 5,6,7 με επίκληση της Πρότασης 2.4.9.
Η μοναδικότητα είναι άμεση συνέπεια της v. Αρκεί να επικαλεστούμε την Πρόταση 2.2.5. (δες και Άσκηση 14).

Παράρτημα Γ′

Απόδειξη του Θεωρήματος Prohorov

Πρώτα τα παρακάτω τεχνικά:

Λήμμα Γ′.0.5. *Αν $\mathcal{K}_X$ το σύνολο των συμπαγών του τοπ. χώρου X τότε:*

1. $K = \bigcap_{i \in I} P_i^{-1}(P_i(K)) \quad \forall K \in \mathcal{K}_X$

2. *Αν $K, L \in \mathcal{K}_X$ με $K \cap L = \emptyset$ τότε υπάρχει $i \in I$ με $P_j(K) \cap P_j(L) = \emptyset$ για ολα τα $j \in I$ με $i \preceq j$.*

3. $P_j(K) \subset P_{ij}^{-1}(P_i(K))$ *για όλα τα $i \preceq j$ στο I και $K \in \mathcal{K}_X$.*

Απόδειξη.

1. Πάντοτε $K \subset P_i^{-1}(P_i(K))$ και άρα $K \subset \bigcap_{i \in I} P_i^{-1}(P_i(K))$. Υποθέτουμε τώρα ότι $K \neq \emptyset$ (αλλιώς είναι προφανές) και έστω $x \in \bigcap_{i \in I} P_i^{-1}(P_i(K))$. Τότε $P_i(x) \in P_i(K)$ για κάθε $i \in I$ και συνεπώς τα σύνολα $K_i^x = \{y \in K : P_i(y) = P_i(x)\} \quad , i \in I$ είναι μη-κενά $\subset K$ και αφού τα K_i^x είναι κλειστά (η P_i συνεχής) συμπεραίνουμε ότι είναι συμπαγή. Επίσης αν $i \preceq j$ τότε η ισότητα $P_j(y) = P_j(x) \Rightarrow (P_{ij} \circ P_j)(y) = (P_{ij} \circ P_j)(x) \Rightarrow P_i(y) = P_i(x)$ και άρα $K_j^x \subset K_i^x$ όταν $i \preceq j$. Από το τελευταίο, τη συμπάγεια των $K_i^x, i \in I$ και το γεγονός ότι $K_i^x \neq \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι $\bigcap_{i \in I} K_i^x \neq \emptyset$ και συνεπώς υπάρχει $y \in X$ με $y \in K_i^x$ για κάθε $i \in I$ οπότε $P_i(y) = P_i(x)$ για κάθε $i \in I$. Όμως η οικογένεια $\{P_i, i \in I\}$ είναι διαχωρίζουσα και άρα $x = y$ οπότε $x \in K_i^x \subset K$.

2. Θέτουμε $M_i = P_i^{-1}(P_i(K)) \cap L, i \in I$. Η συμπάγεια των K, L και η συνέχεια της P_i συνεπάγονται ότι τα σύνολα $M_i, i \in I$ είναι συμπαγή. Επιπλέον για $i \preceq j$ έχουμε :$(P_{ij} \circ P_j)(K) = P_i(K)$ οπότε $P_j(K) \subset P_{ij}^{-1}(P_i(K))$ και συνεπώς

$P_j^{-1}(P_j(K)) \subset P_j^{-1}(P_{ij}^{-1}(P_i(K))) = (P_{ij} \circ P_J)^{-1}(P_i(K)) = P_i^{-1}(P_i(K))$
και ώστε $M_j \subset M_i$ όταν $i \preceq j$.

Από το αποτέλεσμα (1) έχουμε $\bigcap\limits_{i\in I} M_i = K \cap L = \emptyset$ και άρα $\bigcap\limits_{k=1}^{m} M_{i_k} = \emptyset$ για $\{i_1, ..., i_m\} \subset I$. Από τις ιδιότητες του I συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $i \in I$ με $i_1, ..., i_m \preceq i$ και $M_i = \emptyset$. Αν τώρα $j \in I$ με $i \preceq j$ θα έχουμε $M_j = \emptyset$ δηλ. $P_j^{-1}(P_j(K)) \cap L = \emptyset$ και τελικά $P_j(K) \cap P_j(L) = \emptyset$

3. Για $i \preceq j$ στο I έχουμε $(P_{ij} \circ P_J)(K) = P_i(K)$ και άρα $P_{ij}^{-1}(P_{ij}(P_i(K))) = P_{ij}^{-1}(P_i(K))$ και τελικά

$$P_i(K) \subset P_{ij}^{-1}(P_i(K))$$

□

Λήμμα Γ΄.0.6. *Έστω I το σύνολο όπως στην εκφώνηση και πραγματικοί αριθμοί $a_i \geq 0$ και $b_i \geq 0$ τέτοιοι ώστε :*
$i \preceq j \Rightarrow a_j \leq a_i$ και $b_j \leq b_i$. Τότε

$$\inf_{i\in I}(a_i + b_i) = \inf_{i\in I} a_i + \inf_{i\in I} b_i$$

Απόδειξη. Αν $\inf\limits_i a_i = a, \inf\limits_i b_i = b$ τότε για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχουν $i, j \in I$ με $a \leq a_i < a + \frac{\epsilon}{2}$ και $b \leq b_j < b + \frac{\epsilon}{2}$. Από τις ιδιότητες του I εξασφαλίζεται $k \in I$ με $i, j \preceq k$ οπότε $a_k \leq a_i$ και $b_k \leq b_j$ και συνεπώς

$$a + b \leq a_k + b_k \leq a + b + \epsilon \quad \text{δηλαδή} \quad \inf_i\{a_i + b_i\} = a + b$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος

1. Λόγω συνέχειας το $P_i(K)$ είναι συμπαγές $\subset X_i$ όταν $K \in \mathcal{K}_X$ και $i \in I$. Ορίζουμε $\tau : \mathcal{K}_X \mapsto [0, \infty)$ ως

$$\tau(K) = \inf\{\mu_i(P_i(K)) : i \in I\}$$

Από το Λήμμα 0.5. και τις υποθέσεις συνάγεται ότι

$$\mu_j(P_j(K)) \leq \mu_j(P_{ij}^{-1}(P_i(K))) = \mu_i(P_i(K))$$

για όλα τα $i \preceq j$ στο I και $K \in \mathcal{K}_X$ συνεπώς

$$\tau(K) = \inf\{\mu_j(P_j(K)) : i \preceq j\} \tag{1}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η τ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος 2.4.2. δηλαδή:

- Αν $K \subset L$ στο $\mathcal{K}_X$ τότε $\tau(K) \leq \tau(L)$. Προφανής.

- Αν $K, L \in \mathcal{K}_X$ με $K \cap L = \emptyset$ τότε κατά το Λήμμα 0.4. υπάρχει $i \in I$ ώστε να είναι :$P_j(K) \cap P_j(L) = \emptyset$ όταν $i \preceq j$ και συνεπώς με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}\tau(K \cup L) &= \inf\{\mu_j(P_j(K \cup L)) : i \preceq j\} \\ &= \inf\{\mu_j(P_j(K)) + \mu_j(P_j(L)) : i \preceq j\} \\ &= \inf\{\mu_j(P_j(K)) : i \preceq j\} + \inf\{\mu_j(P_j(L)) : i \preceq j\}.\end{aligned}$$

  Ώστε $\tau(K \cup L) = \tau(K) + \tau(L)$.

- Όμοια αποδεικνύεται ότι για $K, L \in \mathcal{K}_X$ ισχύει

$$\tau(K \cup L) \leq \tau(K) + \tau(L).$$

- Έστω τυχόντα $\epsilon > 0$ και $K \in \mathcal{K}_X$. Από τον ορισμό της τ εξασφαλίζεται $i \in I$ εις τρόπον ώστε

$$\tau(K) \leq \mu_i(P_i(K)) < \tau(K) + \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

  Όμως το μέτρο μ_i είναι κανονικό και συνεπώς υπάρχει ανοικτό $U \subset X_i$ με $U \supset P_i(K)$ και

$$\mu_i(U) < \mu_i(P_i(K)) + \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

  Αν θέσουμε τώρα $W = P_i^{-1}(U)$ τότε $W \in \mathcal{T}_X, W \supset K$ και για τυχόν $C \in \mathcal{K}_X$ με $K \subset C \subset W$ θα είναι
  $P_i(C) \subset P_i(W) = P_i(P_i^{-1}(U)) \subset U$ και άρα
  $\mu_i(P_i(C)) \leq \mu_i(U)$ οπότε

$$\tau(C) \leq \mu_i(U) \tag{4}$$

  Από (2),(3),(4) συνάγεται ότι για $C \in \mathcal{K}_X$ με $K \subset C \subset W$ ισχύει

$$\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$$

  όπου W ανοικτό $\subset X$ με $W \supset K$.
  Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα 2.4.2. υπάρχει κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ με $\mu(K) = \tau(K)$ για κάθε $K \in \mathcal{K}$. Επιπλέον για το μέτρο μ έχουμε ότι

$$\mu(P_i^{-1}(B)) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές } \subset P_i^{-1}(B)\} \tag{5}$$

  για τυχόν $i \in I$ και $B \in \mathscr{B}_i$. Όμως όταν $K \subset P_i^{-1}(B)$ τότε $P_i(K) \subset P_i(P_i^{-1}(B)) \subset B$ και συνεπώς
  $\mu_i(P_i(K)) \leq \mu_i(B)$ οπότε $\mu(K) = \tau(K) \leq \mu_i(B)$.
  Από την (5) τώρα προκύπτει ότι

$$\mu(P_i^{-1}(B)) \leq \mu_i(B) \quad \forall i \in I, \forall B \in \mathscr{B}_i$$

2. Καταρχήν να παρατηρήσουμε ότι για τυχόντα $i, j \in I$ και $k \in I$ με $i, j \preceq k$ έχουμε $\mu_k(P_{ik}^{-1}(X_i)) = \mu_i(X_i)$ και άρα $\mu_i(X_i) = \mu_k(X_k)$. Όμοια $\mu_j(X_j) = \mu_k(X_k)$ και συνεπώς μπορούμε να θέσουμε $\rho = \mu_i(X_i), i \in I$. Περαιτέρω για τυχόν $K \in \mathcal{K}_X$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(K) &= \inf_{i\in I} \mu_i(P_i(K)) \\ &= \inf_{i\in I} \mu_i\left[X_i \setminus (X_i \setminus P_i(K))\right] \\ &= \inf_{i\in I} (\rho - \mu_i(X_i \setminus P_i(K))) \\ &= \rho - \sup_{i\in I} \mu_i(X_i \setminus P_i(K)).\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\mu(K) + \sup_{i\in I} \mu_i(X_i \setminus P_i(K)) = \rho \quad , K \in \mathcal{K}_X \tag{6}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η συνθήκη Prohorov. Άρα για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \in \mathcal{K}_X$ τέτοιο ώστε $\sup_{i\in I} \mu_i(X_i \setminus P_i(K_\epsilon)) \leq \epsilon$ και έτσι από την (6) προκύπτει ότι $\rho - \epsilon \leq \mu(K_\epsilon)$. Από την άλλη όπως είδαμε στο (1) ισχύει
$\mu(K_\epsilon) \leq \mu(X) = \mu(P_i^{-1}(X_i)) \leq \mu_i(X_i) = \rho$ και συνεπώς

$$\rho - \epsilon \leq \mu(K_\epsilon) \leq \rho$$

Ώστε $\rho = \sup\{\mu(K) : K \text{συμπαγές} \subset X\}$ και άρα $\mu(X) = \rho$ αφού το μ είναι κανονικό μέτρο.
Θα δείξουμε τώρα ότι για τυχόντα $i \in I, B \in \mathscr{B}_i$ ισχύει

$$\mu(P_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$$

Θέτουμε $v_i(B) = \mu(P_i^{-1}(B)), B \in \mathscr{B}_i$. Η v_i είναι μέτρο στον $(X_i, \mathscr{B}_i)$ και προφανώς $v_i(X_i) = \mu_i(X_i)$. Επιπλέον από το (1) ισχύει $v_i \leq \mu_i$. Σύμφωνα τώρα με την Πρόταση 2.2.6. θα είναι $v_i = \mu_i$.
Για τον ευθύ ισχυρισμό απομένει να δειχτεί η μοναδικότητα του μέτρου μ. Πράγματι έστω μ' άλλο κανονικό μέτρο για το οποίο ισχύει $\mu'(P_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ για $i \in I, B \in \mathscr{B}_i$. Για τυχόν $K \in \mathcal{K}_X$ και σύμφωνα με το Λήμμα 0.5. θα είναι $K = \bigcap_{i\in I} F_i$ με $F_i = P_i^{-1}(P_i(K)), i \in I$. Τα σύνολα F_i είναι κλειστά και για $i \preceq j$ ισχύει $F_i \supset F_j$ (δες απόδειξη του Λήμματος). Συνεπώς $\mu'(K) = \inf_{i\in I} \mu'(P_i^{-1}(P_i(K))) = \inf_{i\in I} \mu_i(P_i(K)) = \mu(K)$ για όλα τα $K \in \mathcal{K}_X$ και αφού μ, μ' κανονικά θα είναι $\mu = \mu'$.
Μένει να δειχτεί ο αντίστροφος ισχυρισμός. Υποθέτουμε δηλαδή ότι ισχύει $\mu(P_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ για $i \in I, B \in \mathscr{B}_i$ και θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη Prohorov. Άμεσα $\rho = \mu(X) = \mu_i(X_i), i \in I$. Εξάλλου κατά την (6) ισχύει πάντα ότι $\mu(K) + \sup_{i\in I} \mu_i(X_i \setminus P_i(K)) = \rho$ για όλα τα $K \in \mathcal{K}_X$ και συνεπώς έχουμε για όλα τα $K \in \mathcal{K}_X$

$$\mu(K) + \sup_{i\in I} \mu_i(X_i \setminus P_i(K)) = \mu(X) \tag{7}$$

Από την κανονονικότητα του μ για τυχόν $\epsilon > 0$ εξασφαλίζεται $K_\epsilon \in \mathcal{K}_X$ με $\mu(X) < \mu(K_\epsilon) + \epsilon$ και συνεπώς από την (7)

$$\sup_{i \in I} \mu_i(X_i \setminus P_i(K_\epsilon)) < \epsilon.$$

Βιβλιογραφία

[1] Hewitt-Stromberg : *Real and Abstract Analysis* , Springer-Verlag.

[2] Vulikh , B.Z : *A Brief Course in the Theory of Functions of a Real Variable* , mir editions.

[3] Cohn , D. : *Measure Theory* , Birkhäuser.

[4] Parthasarathy , K.R : *Probability Measures on Metric Spaces* , Academic Press.

[5] Parthasarathy , K.R : *Introduction to Probability and Meausure* , McMillan Company of India.

[6] Kingman-Taylor : *Measure and Integration* , Cambridge University Press.

[7] Bauer , H : *Probability Theory and Elements of Measure Theory* , Holt, Rinehart and Winston, Inc.

[8] Ash , R. : *Real Analysis and Probability* , Academic Press.

[9] Billingsley , P. : *Probability and Measure* , Wiley.

[10] Dudley , R. : *Real Analysis and Probability* , Wadsworth Brooks / Cole.

[11] Rogers , C.A : *Hausdorff Measures* , Cambridge University Press.

[12] Κουμουλής, Γ. - Νεγρεπόντης, Σ. : *Θεωρία Μέτρου* , Εκδόσεις Συμμετρία

[13] Marle , C-M. : *Mesures et Probabilités* , Hermann , Paris.

[14] Lang , S. : *Real Analysis* , Addison-Wesley.

[15] Schwartz , L. : *Radon Measures* , Oxford.

[16] Vakhania N.N - Taieladge V.I - Chobanyan S.A. : *Probability Distributions on Banach Spaces* , D. Reidel Publishing Company.

[17] Malliavin , P. : *Integration and Probability* , Springer-Verlag.

[18] Bourbaki , N. : *Elements de Mathématique , Integration , Châpitre IX* , Paris 1969.

[19] Neveu , J. : *Calcul de Probabilités* , Paris 1970

[20] Rao , M.M : *Measure Theory and integration*, 2^{nd} ed. Marcel-Dekker 2004.

[21] Rudin , W. : *Functional Analysis* , McGraw-Hill 1973.

[22] Jacobs , K. : *Measure and Integral* , Academic Press 1978.